

УДК 621.313.13-251:51

ББК 3291.53в631

А.А. АФАНАСЬЕВ, В.С. ГЕНИН, Н.Н. ИВАНОВА

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ РАСЧЁТЕ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЕНТИЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

**Ключевые слова:** двигатель, магнит, индукция, магнитное поле, уравнение Лапласа, система уравнений, пакет *Matha*.

*Рассматривается аналитический метод расчёта магнитного поля магнитоэлектрического вентильного двигателя, основанный на разбиении его активной области на совокупность геометрически однородных листов, на границах которых выполняются условия сопряжения их магнитных полей: скалярные магнитные потенциалы и нормальные составляющие магнитной индукции не претерпевают скачка (разрыва). В качестве источников магнитного поля помимо постоянных магнитов и токов обмотки статора предусматриваются намагниченности ферромагнитных участков его магнитной цепи.*

*При использовании метода разделения переменных Фурье условия сопряжения будут сводиться к решению системы линейных уравнений для нахождения соответствующих постоянных. Приводится решение системы параметрических уравнений, описывающей расчётную схему индуктора беспазового магнитоэлектрического вентильного двигателя в общем виде с использованием пакета аналитических (символьных) вычислений *Matha*. Полученное в общем виде решение позволяет использовать результаты для описания магнитных потенциалов и индукций вентильных двигателей различных расчётных геометрий.*

Метод разделения переменных Фурье–Эйлера широко применяется в задачах математической физики. Он может быть адаптирован к расчёту магнитных полей в различных электромеханических устройствах путём разбиения активной области – совокупности неоднородных, в том числе нелинейных, сред на совокупность геометрически однородных листов [5, 10]. В электрической машине это зубцы и ярма ферромагнитных сердечников, пазы в сердечниках с проводниками тока, воздушные зазоры между сердечниками, магнитно изолированные ферромагнитные стержни магнитных редукторов [2, 4, 5].

Указанная адаптация, заключающаяся в разбиении расчётной области на совокупность параллельных полос или концентрических колец, приближает аналитическую расчётную методику к технологии численных методов. Метод разделения переменных оперирует набором неизвестных постоянных, которые находятся из системы линейных уравнений, полученных из граничных условий магнитного поля в точках наблюдения на границах соседних полос или колец.

Искомые переменные, одни из которых являются, например, для полос, функциями координаты  $x$ , другие – координаты  $y$ , представляются соответствующими тригонометрическими рядами. Источниками магнитного поля в рассматриваемых задачах являются не только постоянные магниты и токи обмоток,

но и намагниченности ферромагнитных сред или магнитные напряжения на их участках.

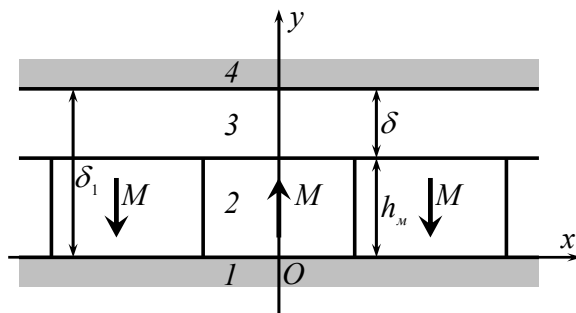
Рассмотрим особенности расчёта постоянных метода Фурье в общем виде применительно к беспазовому магнитоэлектрическому вентильному двигателю [1–4].

**Расчётная схема и допущения.** Вентильные двигатели с высокоэнергетическими постоянными магнитами на основе редкоземельных материалов типа железо–неодим–бор и самарий–кобальт имеют высокую перегрузочную способность, улучшенные статические и динамические характеристики и массогабаритные показатели. Эти двигатели принято называть магнитоэлектрическими, или бесконтактными, или бесщеточными, вентильными электродвигателями постоянного тока. Они находят применение во многих областях: на транспорте, в робототехнике, медицинском оборудовании и др.

Для расчёта магнитного поля рассматриваемого магнитоэлектрического вентильного двигателя будем использовать аналитическую модель, в основе которой лежат разбиение его активной области на совокупность геометрически однородных полос, соответствующих ярмам, зубцам сердечников, их наружным областям, магнитам, воздушному зазору, и использование технологии разделения переменных Фурье. На границах полос выполняются условия сопряжения магнитных полей: скалярные магнитные потенциалы и нормальные составляющие магнитной индукции не претерпевают скачка (разрыва). Там, где магнитные листы обмоток располагаются на границах указанных полос, магнитные потенциалы будут иметь скачок на величину полного тока магнитного листа [10].

Одной из характерных особенностей вентильных двигателей является использование высокоэнергетических постоянных магнитов. Источниками магнитного поля в таких двигателях являются токи обмотки статора и намагниченности магнитотвёрдых (магнитов) и магнитомягких (ферромагнитных) сред [11].

Расчётная схема индуктора беспазового магнитоэлектрического вентильного двигателя, содержащая 4 среды, показана на рисунке.



Расчётная схема с четырьмя средами:

- 1, 4 – ферромагнитные ярма; 2 – постоянные магниты с намагниченностью  $M$ ;  
3 – воздушный зазор

Решаем задачу расчёта магнитного поля магнитоэлектрического вентильного двигателя при следующих допущениях:

- 1) ферромагнитные среды линейны (их магнитные проницаемости постоянны);
- 2) вектор намагничённости постоянных магнитов имеет только одну компоненту  $M = M_y$ ;
- 3) справедлив принцип суперпозиции магнитных полей магнитов ротора (индуктора) и токов обмотки статора.

**Исходные уравнения магнитного поля магнитоэлектрического вентильного двигателя.** Рассматриваемое магнитное поле потенциально и удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа  $\nabla^2 u = 0$ , которое будем решать методом разделения переменных Фурье отдельно для каждой из четырёх названных выше сред, стыкуя их граничные значения путем вычисления соответствующих постоянных. Ищем скалярные магнитные потенциалы  $u_n(x, y)$  и радиальные составляющие магнитной индукции  $B_{ny}(x, y)$  в средах ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). Согласно методу разделения переменных Фурье они могут описываться в следующем виде [6, 12]:

$$\begin{cases} u_1(x, y) = Ae^{k\sigma y} \cos k\sigma x, \\ B_{1y}(x, y) = -\mu_0\mu_p \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\mu_0\mu_p k\sigma Ae^{k\sigma y} \cos k\sigma x, \\ y \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_2(x, y) = (Be^{k\sigma y} + Ce^{-k\sigma y}) \cos k\sigma x, \\ B_{2y}(x, y) = \mu_0 \left( -\frac{\partial u_2}{\partial y} + M_{yk} \cos k\sigma x \right) = \\ = \mu_0 (-k\sigma Be^{k\sigma y} + k\sigma Ce^{-k\sigma y}) \cos k\sigma x + \mu_0 M_{yk} \cos k\sigma x, \\ 0 \leq y \leq h_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_3(x, y) = (De^{k\sigma y} + Ee^{-k\sigma y}) \cos k\sigma x, \\ B_{3y}(x, y) = -\mu_0 \frac{\partial u_3}{\partial y} = -\mu_0 (k\sigma De^{k\sigma y} - k\sigma Ee^{-k\sigma y}) \cos k\sigma x, \\ h_m \leq y \leq h_m + \delta = \delta_1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_4(x, y) = Fe^{-k\sigma y} \cos k\sigma x, \\ B_{4y}(x, y) = -\mu_0\mu_c \frac{\partial u_4}{\partial y} = \mu_0\mu_c k\sigma Fe^{-k\sigma y} \cos k\sigma x, \\ y \geq h_m + \delta = \delta_1, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mu_p, \mu_c$  – относительные магнитные проницаемости сердечников ротора и статора;  $\sigma = \pi/\tau$ .

Предполагается, что зависимость намагниченности  $M = M(x)$  магнитов ротора известна и может быть представлена тригонометрическим рядом

$$M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} M_{yk} \cos k\sigma x.$$

**Расчёт постоянных.** Входящие в уравнения (1)–(4) шесть постоянных  $A, B, C, D, E, F$  находим из следующих шести граничных условий:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0), \\ A &= B + C, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} B_{1y}(x, 0) &= B_{2y}(x, 0), \\ -\mu_p A &= -B + C + m_k, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, h_m) &= u_3(x, h_m), \\ B\varepsilon + C\varepsilon^{-1} &= D\varepsilon + E\varepsilon^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B_{2y}(x, h_m) &= B_{3y}(x, h_m), \\ -B\varepsilon + C\varepsilon^{-1} + m_k &= -D\varepsilon + E\varepsilon^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_3(x, \delta_1) &= u_4(x, \delta_1), \\ D\varepsilon_1 + E\varepsilon_1^{-1} &= F\varepsilon_1^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_{3y}(x, \delta_1) &= B_{4y}(x, \delta_1), \\ -D\varepsilon_1 + E\varepsilon_1^{-1} &= \mu_c F\varepsilon_1^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $m_k$  –  $k$ -е слагаемое разложения Фурье намагниченности магнита,  $m_k = M_{yk} / (k\sigma)$ ;  $\varepsilon = e^{k\sigma h_m}$ ;  $\varepsilon_1 = e^{k\sigma \delta_1}$ ;  $\delta_1 = h_m + \delta$ .

Таким образом, выражения (5)–(10) можно записать как систему параметрических уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= B + C, \\ -\mu_p A &= -B + C + m_k, \\ B\varepsilon + C\varepsilon^{-1} &= D\varepsilon + E\varepsilon^{-1}, \\ -B\varepsilon + C\varepsilon^{-1} + m_k &= -D\varepsilon + E\varepsilon^{-1}, \\ D\varepsilon_1 + E\varepsilon_1^{-1} &= F\varepsilon_1^{-1}, \\ -D\varepsilon_1 + E\varepsilon_1^{-1} &= \mu_c F\varepsilon_1^{-1}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

**Аналитическое решение системы параметрических уравнений.** Для аналитического решения системы (11) был использован пакет аналитических (символьных) вычислений *Maxima*, распространяемый под лицензией GPL, который позволяет производить операции с полиномами, дифференцирование, интегрирование, разложение в ряд, преобразование Лапласа, решать обыкновенные дифференциальные уравнения, системы линейных уравнений и др. *Maxima* позволяет выполнять расчеты с высокой точностью, используя точные дроби, целые числа и числа с плавающей точкой произвольной точности. Таким образом, данный пакет по части символьных вычислений обладает весьма широкими

возможностями и способен конкурировать с коммерческими программами, в числе которых наиболее популярные и мощные Mathematica и Maple.

Maxima представляет собой консольную программу, для записи математических формул в ней используются обычные текстовые символы. При этом можно также работать с графической программой wxMaxima, в которой формулы вводятся в текстовом виде, а отображаются они уже в виде привычных математических символов. Командная строка здесь отделена от окна ввода-вывода, а дополнительные кнопки и система меню позволяют вводить команды не только в текстовом, но и в диалоговом режиме.

Визуальное редактирование научных текстов, когда текст на экране отображается практически в том же виде, в котором он будет распечатан (wysiwyg – what-you-see-is-what-you-get), обеспечивает интерфейс к Maxima – дополнительный режим в платформе TeXmacs. В частности, этот интерфейс имеет так называемый математический режим ввода, удобный для работы с формулами, также он умеет импортировать/экспортировать текст в LaTeX и XML/HTML.

К сожалению русифицированная версия программы Maxima не имеет встроенной справки на русском языке, а статьи, посвященные изучению этой программы [8, 13], большей частью рассчитаны на относительно подготовленного пользователя. При этом появились пособия [7, 13, 14], с помощью которых можно освоить начальные приемы работы с системой. В целом Maxima может заменить при решении многих задач Maple и Mathematica, достаточно проста для освоения и ее можно рекомендовать для изучения студентам вузов, а также специалистам и научным работникам для проведения весьма сложных расчетов и исследований.

Решение системы уравнений (11) в пакете *Maxima* относительно неизвестных для  $A, B, C, D, E, F$  в общем виде относительно параметров  $\mu_p, \mu_c, \varepsilon, \varepsilon_1, m_k$  получено в виде

$$\begin{aligned} A &= -\frac{m_k(\varepsilon((\mu_c+1)\varepsilon_1^2-\mu_c+1)+(-\mu_c-1)\varepsilon_1^2+(\mu_c-1)\varepsilon^2)}{\varepsilon((\mu_c+1)\varepsilon_1^2+\mu_c-1)+\mu_p\varepsilon((\mu_c+1)\varepsilon_1^2-\mu_c+1)}, \\ B &= -\frac{m_k((-\mu_c-1)\varepsilon_1^2+(\mu_c-1)\varepsilon^2+(2-2\mu_c)\varepsilon)+m_k\mu_p((-\mu_c-1)\varepsilon_1^2+(\mu_c-1)\varepsilon^2)}{\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2+2\mu_c-2)+\mu_p\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2-2\mu_c+2)}, \\ C &= \frac{m_k((-2\mu_c-2)\varepsilon\varepsilon_1^2+(\mu_c+1)\varepsilon_1^2+(1-\mu_c)\varepsilon^2)+m_k\mu_p((-\mu_c-1)\varepsilon_1^2+(\mu_c-1)\varepsilon^2)}{\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2+2\mu_c-2)+\mu_p\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2-2\mu_c+2)}, \\ D &= -\frac{m_k((\mu_c-1)\varepsilon^2+(2-2\mu_c)\varepsilon+\mu_c-1)+m_k\mu_p((\mu_c-1)\varepsilon^2-\mu_c+1)}{\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2+2\mu_c-2)+\mu_p\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2-2\mu_c+2)}, \\ E &= \frac{m_k((\mu_c+1)\varepsilon^2\varepsilon_1^2+(-2\mu_c-2)\varepsilon\varepsilon_1^2+(\mu_c+1)\varepsilon_1^2)+m_k\mu_p((\mu_c+1)\varepsilon^2\varepsilon_1^2+(-\mu_c-1)\varepsilon_1^2)}{\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2+2\mu_c-2)+\mu_p\varepsilon((2\mu_c+2)\varepsilon_1^2-2\mu_c+2)}, \\ F &= \frac{m_k(\varepsilon^2\varepsilon_1^2-2\varepsilon\varepsilon_1^2+\varepsilon_1^2)+m_k\mu_p(\varepsilon^2\varepsilon_1^2-\varepsilon_1^2)}{\varepsilon((\mu_c+1)\varepsilon_1^2+\mu_c-1)+\mu_p\varepsilon((\mu_c+1)\varepsilon_1^2-\mu_c+1)} \Big]. \end{aligned}$$

В магнитоэлектрическом вентильном двигателе, не имеющем статорного сердечника, рассмотренного в [1, 9], среда 4 отсутствует, а среда 3 продолжается в бесконечность, в этом случае  $\mu_c = 1$ . Тогда решение системы уравнений, учитывая, что  $\mu_c = 1$  и  $\mu_p = 1$ , принимает более простой вид:

$$\left[ \left[ A = -\frac{m_k(\varepsilon-1)}{2\varepsilon}, B = \frac{m_k}{2\varepsilon}, C = -\frac{m_k}{2}, D = 0, E = \frac{m_k(\varepsilon-1)}{2}, F = \frac{m_k(\varepsilon-1)}{2} \right] \right].$$

**Выводы.** 1. Аналитический подход к расчёту магнитного поля магнитоэлектрического вентильного двигателя позволяет корректно описать его нелинейную магнитную цепь, представленную совокупностью прямолинейных геометрически однородных листов с использованием параметров намагниченности их ферромагнитных участков.

2. Пакет аналитических (символьных) вычислений *Maxima*, распространяемый под лицензией GPL, позволил получить в общем виде решение системы параметрических уравнений.

3. Решение системы параметрических уравнений, описывающей расчётную схему индуктора беспазового магнитоэлектрического вентильного двигателя, в общем виде позволяет использовать полученные результаты для описания магнитных потенциалов и индукций двигателей различных расчетных геометрий.

#### Литература

1. Аналитический расчёт беспазового микродвигателя, не имеющего статорного сердечника / А.А. Афанасьев, В.А. Ваткин, В.С. Генин и др. // Вестник Чувашского университета. 2019. № 1. С. 13–22.
2. Аналитическое и численное моделирование магнитоэлектрических вентильных двигателей / А.А. Афанасьев, В.С. Генин, В.А. Ваткин и др. // Электричество. 2021. № 6. С. 72–78.
3. Афанасьев А.А. К расчёту беспазового магнитоэлектрического вентильного двигателя // Электричество. 2019. № 8. С. 62–66.
4. Афанасьев А.А. Математическое моделирование электромеханических систем. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2020. 274 с.
5. Афанасьев А.А. Расчёт магнитоэлектрических вентильных двигателей методом разделения переменных Фурье // Электротехника. 2021. № 2. С. 21–27.
6. Боголюбов А.Н., Крайцов В.В. Задачи по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 350 с.
7. Губина Т.Н., Андропова Е.В. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики Maxima. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. 99 с.
8. Додьера Р. Коротко о Maxima: пер. с англ. [Электронный ресурс]. URL: <https://dwg.ru/dnl/3633>.
9. Нестерин В.А., Генин В.С., Романов Р.А., Токмаков Д.А. Математическое моделирование электромагнитной системы сверхминиатюрного магнитоэлектрического двигателя // Электротехника. 2017. № 7. С. 7–10.
10. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. 352 с.
11. Поливанов К.М. Ферромагнетики. М.; Л.: ГЭИ, 1957. 256 с.
12. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
13. Стахин Н.А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima. (ПО для решения задач аналитических (символьных) вычислений). М., 2008. 86 с. [Электронный ресурс]. URL: [https://uneex.ru/static/MethodBooks\\_Maxima/Maxima.pdf](https://uneex.ru/static/MethodBooks_Maxima/Maxima.pdf).
14. Чичкарёв Е.А. Компьютерная математика с Maxima. М.: ALT Linux, 2012. 384 с.

---

**АФАНАСЬЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ** – доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (afan39@mail.ru).

**ГЕНИН ВАЛЕРИЙ СЕМЕНОВИЧ** – доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (v.s.genin@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9086-0906>).

**ИВАНОВА НАДЕЖДА НИКОЛАЕВНА** – кандидат технических наук, доцент кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (niva\_mail@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7130-8588>).

---

**Aleksandr A. AFANASYEV, Valeriy S. GENIN, Nadezhda N. IVANOVA**  
**ANALYTICAL CALCULATIONS INVOLVING MAGNETIC FIELDS**  
**OF A MAGNETOELECTRIC VALVE MOTOR**  
**USING THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES**

**Key words:** motor, magnet, induction, magnetic field, Laplace's equation, system of equations, Maxima package.

An analytical method for calculating the magnetic field of a magnetolectric valve motor is considered based on the division of its active region into a set of geometrically homogeneous sheets, at the boundaries of which the conditions for conjugating their magnetic fields are met: scalar magnetic potentials and normal components of magnetic induction do not undergo a jump (break). As sources of the magnetic field, in addition to permanent magnets and currents of the stator winding, the magnetization of ferromagnetic sections of its magnetic circuit is provided.

When using the Fourier method of separation of variables, the conjugation conditions will be reduced to solving a system of linear equations to find the corresponding constants. The solution of the system of parametric equations describing the design scheme of the inductor of a slotless magnetolectric valve motor is given, in general terms using the Maxima analytical (symbolic) calculation package. The solution obtained makes it possible to use the results to describe the magnetic potentials and inductions of valve motors of various design geometries.

#### References

1. Afanas'ev A.A., Vatkin V.A., Genin V.S. et al. *Analiticheskii raschet bespazovogo mikrodvigatelya, ne imeyushchego statornogo serdechnika* [Analytical Calculation of Slotless Micromotor Without Stator Core]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2019, no. 1, pp. 13–22.
2. Afanas'ev A.A., Genin V.S., Vatkin V.A. et al. *Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie magnitoelektricheskikh ventil'nykh dvigatelei* [Analytical and Numerical Simulation of Magnetolectric Valve Motors]. *Elektrichestvo*, 2021, no. 6, pp. 72–78.
3. Afanas'ev A.A. *K raschetu bespazovogo magnitoelektricheskogo ventil'nogo dvigatelya* [To Calculation of Slotless and Brushless Motor with Permanent Magnets]. *Elektrichestvo*, 2019, no. 8, pp. 62–66.
4. Afanas'ev A.A. *Matematicheskoe modelirovanie elektromekhanicheskikh sistem* [Mathematical modeling of electromechanical systems]. Cheboksary, Chuvash University Publ., 2020, 274 p.
5. Afanas'ev A.A. *Raschet magnitoelektricheskikh ventil'nykh dvigatelei metodom razdeleniya peremennykh Fur'e* [Calculating Magnetolectric Valve Motors by the Fourier Variable Separation Method]. *Elektrotehnika*, 2021, no. 2, pp. 21–27.
6. Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. *Zadachi po matematicheskoi fizike* [Problems in mathematical physics]. Moscow, Moscow University Publ., 1998, 350 p.
7. Gubina T.N., Andropova E.V. *Reshenie differentsial'nykh uravnenii v sisteme komp'yuternoii matematiki Maxima* [Solution of differential equations in the system of computer mathematics Maxima]. *Elets*, 2009, 99 p.

8. Dodiera R. *Korotko o Maxima* [Briefly about Maxima]. Available at: <https://dwg.ru/dnl/3633>.
9. Nesterin V.A., Genin V.S., Romanov R.A., Tokmakov D.A. *Matematicheskoe modelirovanie elektromagnitnoi sistemy sverkhminiaturnogo magnitoelektricheskogo dvigatelya* [Mathematical modeling of the electromagnetic system of a superminiature magnetoelectric motor]. *Elektrotekhnik*, 2017, no. 7, pp. 7–10.
10. Polivanov K.M. *Teoreticheskie osnovy elektrotehniki. Ch. 3. Teoriya elektromagnitnogo polya* [Theoretical foundations of electrical engineering. Part 3: Electromagnetic field theory]. Moscow, Energiya Publ., 1969, 352 p.
11. Polivanov K.M. *Ferromagnetiki* [Ferromagnets]. Moscow, Leningrad, 1957, 256 p.
12. Polyainin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p.
13. Stakhin N.A. *Osnovy raboty s sistemoi analiticheskikh (simvol'nykh) vychislenii Maxima. (PO dlya resheniya zadach analiticheskikh (simvol'nykh) vychislenii)* [Basics of working with the system of analytical (symbolic) calculations Maxima. (Software for solving problems of analytical (symbolic) calculations)]. Moscow, 2008, 86 p. Available at: [https://uncex.ru/static/MethodBooks\\_Maxima/Maxima.pdf](https://uncex.ru/static/MethodBooks_Maxima/Maxima.pdf).
14. Chichkarev E.A. *Komp'yuternaya matematika s Maxima* [Computer Mathematics with Maxima]. Moscow, ALT Linux Publ., 2012, 384 p.

---

**ALEKSANDR A. AFANASYEV – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Automation and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (afan39@mail.ru).**

**VALERIY S. GENIN – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Automation and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (v.s.genin@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9086-0906>).**

**NADEZHDA N. IVANOVA – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical and Hardware Support of Information Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (niva\_mail@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7130-8588>).**

---

**Формат цитирования:** Афанасьев А.А., Генин В.С., Иванова Н.Н. Аналитические вычисления при расчёте магнитоэлектрического вентильного двигателя методом разделения переменных // Вестник Чувашского университета. – 2022. – № 3. – С. 45–52. DOI: 10.47026/1810-1909-2022-3-45-52.