DOI: 10.47026/1810-1909-2024-2-54-66

УДК 519.612.4
519.852.6

А.Ю. ИВАНИЦКИЙ, М.В. КИСЕЛЁВ, М.В. ВАСИЛЬКОВА, В.В. ЕЖОВ

УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ D-ПСЕВДОРЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ДАННЫМИ И МЕРЫ ИХ НЕСОВМЕСТНОСТИ

Ключевые слова: *D-псевдорешения, мера несовместности, интегральные уравнения Фредгольма первого рода в инженерных задачах, метод поточечной невязки, оценка приближённых решений.*

Целью работы *являются разработка и полное математическое обоснование устойчивого метода нахождения нормальных D-псевдорешений для несовместных систем линейных алгебраических уравнений с приближенными данными и меры их несовместности.*
Материалы и методы. *При выполнении работы использовались аналог теоремы Вейерштрасса из теории методов оптимизации, понятие эквивалентности норм в конечномерных пространствах и расширенный вариант леммы Хоффмана для определения расстояния от произвольной точки до полиэдра.*
Результаты. *В работе предлагается идейно простой и надёжный устойчивый способ – метод поточечной невязки для нахождения D-псевдорешений и меры несовместности системы линейных алгебраических уравнений, получающихся в ходе аппроксимации интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, описывающих ряд инженерных задач. Для использования метода достаточно знать поточечную информацию о приближённых данных и погрешности их задания. Доказана теорема сходимости и получена оценка скорости сходимости метода такого же порядка, что и порядок задания погрешностей в исходных данных, т.е. метод является оптимальным по порядку.*
Выводы. *Предложен новый метод численного нахождения нормальных D-псевдорешений для систем линейных алгебраических уравнений с приближенными данными в условиях отсутствия информации о ее разрешимости. Этот метод непараметрический и требует лишь однократного решения оптимизационной задачи с кусочно-линейными ограничениями, а в некоторых случаях – задачи квадратичного программирования.*

Введение. При практическом решении прикладных задач в результате формализации часто приходят к математической модели

$$Au = f, \tag{1}$$

где $A: U \to F$ – оператор, определённый на множестве U со значениями в множестве F; u – неизвестный элемент.

Такого рода задачи относятся к обратным задачам. Например, задача продолжения двумерных потенциальных полей, задача анализа различных спектров, задача восстановления исходного импульсного сигнала, затухающего в кабеле, по измерениям на выходе кабеля, задача нахождения нагрузки, распределённой вдоль тонкого стержня с закреплёнными концам, по измеряемому его прогибу и многие другие сводятся к решению интегрального уравнения 1-го рода

$$\int_a^b K(x,s) \cdot u(s)\, ds = f(x), \tag{2}$$

где $K(s) \in W_2^1[a,b]$, $f(x) \in L_2[c,d]$.

Для численного решения задачи (2) обычно переходят к её конечномерной аппроксимации

$$\bar{A}u = \bar{f}, \tag{3}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \dots \\ \bar{f}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

где $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ – искомый вектор; $\mathbb{R}^{\mathrm{m\times n}}$ – пространство матриц порядка $m \times n$ с вещественными элементами $\{\bar{a}_{ij}\}$; $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ – вещественное пространство векторов размерности n и m соответственно.

Задача (3) может оказаться неразрешимой, а если и разрешимой (возможно, не единственным образом), то её решения, как правило, не обладают свойством устойчивости.

В дальнейшем считаем, что информация о разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (3) отсутствует. В этом случае ищется *псевдорешение* как решение оптимизационной задачи

$$\|\bar{A}u - \bar{f}\| \to \inf. \tag{4}$$

Задача (4) всегда разрешима, и если исходная система (3) имеет решения, то множество псевдорешений совпадает с множеством её решений [6, 14, 19, 26].

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество решений задачи (4).

Для случая полного ранга матрицы $\bar{A}$ задача (4) хорошо исследована в литературе. Здесь мы укажем некоторые из них: [1, 4, 14–16, 19, 22, 23, 26], в которых также рассмотрены численные аспекты решения задачи (4) при возмущении исходных данных $\{\bar{A}, \bar{f}\}$. В некоторых из них применяется аппарат SVD-разложения. Однако, если матрица $\bar{A}$ неполного ранга, при использовании такого подхода в численных расчётах возникает проблема так называемых «маленьких сингулярных чисел», когда вычисление наименьшего сингулярного числа, связанного с рангом матрицы $\bar{A}$, зависит от точности вычислительного устройства [4, 15, 16]. Другие методы решения задачи (4) с матрицей неполного ранга рассмотрены в работах [9–11, 20, 24].

На практике вместо данных $\{\bar{A}, \bar{f}\}$ известны их приближения

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix}, \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \dots \\ \tilde{f}_m \end{bmatrix},$$

связанные либо интегральными соотношениями

$$\| \tilde{A} - \bar{A} \| \leqslant h, \| \tilde{f} - \tilde{f} \| \leqslant \delta, \tag{5}$$

либо, чаще всего, – поточечными соотношениями

$$\left|\tilde{a}_{i_j} - \bar{a}_{ij}\right| \leqslant \Delta_{ij}, \left|\tilde{f}_i - \bar{f}_i\right| \leqslant \delta_i, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $h \geqslant 0, \delta \geqslant 0, \Delta_{ij} \geqslant 0, \delta_i \geqslant 0$ – уровни погрешности задания входных данных.

Таким образом, вместо задачи (4) приходится решать задачу с приближёнными данными

$$\| \tilde{A}u - \tilde{f} \| \to \inf. \tag{7}$$

Для плохо обусловленных задач традиционные методы решения задачи (7), как правило, неэффективны и приводят к таким решениям, которые трудно интерпретировать. Повышение точности задания уровней погрешностей h, δ или Δ_{ij}, δ_i не приводит к тому, что множество решений задачи (7) в каком-то разумном смысле аппроксимирует решения задачи (4). Для решения таких задач нужны специальные методы – методы регуляризации. Суть некоторых из них, основанных на идеях метода регуляризации [13], состоит в построении параметрических регуляризующих алгоритмов $R(\alpha)$, зависящих от параметра α и использующих соотношения (5), которые позволяют получать хорошие приближения к псевдорешению системы (3) при определённых значениях α [11, 12, 21]. Практическое применение этого подхода наталкивается на ряд трудностей. Во-первых, необходимо многократно решать оптимизационные задачи с целью подбора оптимального значения параметра α. Во-вторых, традиционная форма применения метода регуляризации жёстко привязана к способу задания погрешностей (5). На практике же чаще всего известны лишь поточечные оценки вида (6). Использование в этих условиях построения регуляризующего алгоритма возможно, но не всегда оправдано, так как приводит к неадекватному использованию априорной информации. Другие методы для нахождения псевдорешений, использующие информацию о поточечных оценках вида (6) рассмотрены в работах [5, 8].

В дальнейшем мы будем рассматривать задачу нахождения *нормальных D-псевдорешений* системы (3), определяемых как решение следующей оптимизационной задачи

$$\| u \|_I \to inf, u \in U_D = U \cap D, \tag{8}$$

где $U \neq \emptyset$ – непустое множество решений задачи (4), D – замкнутое множество, содержащее дополнительную информацию об искомом псевдорешении системы (3), так что $U_D = U \cap D \neq \emptyset$, а $\|\cdot\|_I$ – произвольная векторная норма в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ранее в работах [5, 7, 18] авторами рассматривался случай $D = \mathbb{R}^n$ и

$$\|\bar{A}u - \bar{f}\| = \| \bar{A}u - \bar{f} \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} u_j - \bar{f}_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

а в работе [8] – для случая D – замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$ и

$$\| \bar{A}u - \bar{f} \| = \| \bar{A}u - \bar{f} \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} u_j - \bar{f}_i \right|.$$

Целью работы являются разработка и полное математическое обоснование устойчивого метода нахождения нормальных D-псевдорешений для несовместных систем линейных алгебраических уравнений с приближенными данными и меры их несовместности.

Материалы и методы. При выполнении работы использовались аналог теоремы Вейерштрасса из теории методов оптимизации, понятие эквивалентности норм в конечномерных пространствах и расширенный вариант леммы Хоффмана для определения расстояния от произвольной точки до полиэдра.

Результаты. В работе предлагается идейно простой и надёжный устойчивый способ – метод поточечной невязки для нахождения D-псевдорешений и меры несовместности системы линейных алгебраических уравнений, получающихся в ходе аппроксимации интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, описывающих ряд инженерных задач. Для использования метода достаточно знать поточечную информацию о приближённых данных и погрешности их задания. Доказана теорема сходимости и получена оценка скорости сходимости метода такого же порядка, что и порядок задания погрешностей в исходных данных, т.е. метод является оптимальным по порядку.

1. Теорема Вейерштрасса для нормальных D-псевдорешений. Как известно [14, 15, 19, 26], множество $U \neq \emptyset$ решений задачи (4) с нормой (9), совпадает с множеством решений нормальной системы уравнений

$$\bar{A}^T\bar{A}u = \bar{A}^T f, \qquad (10)$$

и, следовательно, $U = \{u \in \mathbb{R}^n\colon \bar{A}^T\bar{A}u = \bar{A}^T\bar{f}\}$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\bar{A}u + v = \bar{f};\\ \bar{A}^T v = 0,\end{cases} \qquad (11)$$

где $v \in \mathbb{R}^m$.

Очевидно, если пара $[u \mid v]^T \in \mathbb{R}^{n+m}, u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$ является решением системы (11), то $u \in U$. Действительно, умножая слева первое соотношение (11) на матрицу $\bar{A}^T$и учитывая, что $\bar{A}^T v = 0$, получим систему (10). Обратно, если u – псевдорешение системы (3), т.е. $u \in U$, а $v = \bar{f} - \bar{A}u$, то вектор $[u \mid v]^T$ является решением системы (11).

Величина $y = \| v \|_2 = \| \bar{f} - \bar{A}u \|_2$ называется *мерой несовместности* системы (3) и характеризует, насколько адекватна математическая модель (3) соответствующей физической модели.

В дальнейшем, как уже отмечалось ранее, считаем, что $U_D = U \cap D \neq \emptyset$ или $U_D = \{u \in D\colon \bar{A}^T\bar{A}u = \bar{A}^T f\} \neq \emptyset$, и если пара $[u|v]^T$ является решением системы

$$\begin{cases}\bar{A}u + v = \bar{f}, u \in D;\\ \bar{A}^T v = 0,\end{cases}$$

то $u \in U_D$.

Рассмотрим задачу, аналогичную (8):

$$\| w \|_I \to inf, w \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}, \qquad (12)$$

где $W = \{w = [w_1 w_2 \dots w_n w_{n+1} \dots w_{n+m}]^T = [u \mid v]^T, u = [w_1, w_2 \dots v_n]^T \in D,$

$$v = [w_{n+1} w_{n+2} \cdots v_{n+m}]^T\colon \bar{B}w = \bar{d}\},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix}\bar{A} & E\\ O_1 & \bar{A}^T\end{bmatrix}, \bar{d} = \begin{bmatrix}\bar{f}\\ O_2\end{bmatrix},$$

где O_1 – матрица порядка $n \times m$ с нулевыми элементами; O_2 – нулевой вектор размерности n; $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – единичная матрица порядка $m \times m$.

Так как множество решений системы (11) не пусто, то $\mathbb{W} \neq \emptyset$.

Очевидно, что вектор $u = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, составленный из первых n компонент решений задачи (11), является решением задачи (8) или, что то же самое, нормальным D-псевдорешением системы (3), а $y = \| v \|_2 = (w_{n+1}^2 + w_{n+2}^2 + \dots + w_{n+m}^2)^{1/2}$ – мерой несовместности решений задачи (3).

Пусть W_* – множество решений задачи (12).

Теорема 1. Пусть D – замкнутое множество. Тогда множество $\mathbb{W}_* \neq \emptyset$, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{w^k\} \in \mathbb{W}$ для функционала $\| w \|_I$ сходится к $\mathbb{W}_*$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество $\mathbb{W}_* \neq \emptyset$ и замкнуто. Функционал $\| w \|_I \geq 0$ непрерывный и ограниченный снизу. Тогда все условия Теоремы 2.3 из [2] выполнены и утверждения теоремы следуют непосредственно из этой теоремы. Теорема доказана.

2. Метод поточечной невязки. Далее считаем, что вместо данных $\{\bar{A}, \bar{f}\}$ известны их приближения $\{\tilde{A}, \tilde{f}\}$, связанные соотношениями (6). Следуя [3, 5], вместо индивидуальной пары данных $\{\tilde{A}, \tilde{f}\}$ рассмотрим множества матриц и векторов

$$\mathcal{A} = \{A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}: |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| \leq \Delta_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\},$$
$$\mathcal{F} = \{f = [f_1, f_2, \dots, f_m]: |\tilde{f}_i - f_i| \leqslant \delta_i, i = \overline{1,m}\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{A} \neq \emptyset$ и $\mathcal{F} \neq \emptyset$, так как из (6) следует, что $\bar{A} \in \mathcal{A}$ и $\bar{f} \in \mathcal{F}$.

Рассмотрим множество систем

$$\begin{bmatrix} A & E \\ O_1 & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \hline v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \hline O_2 \end{bmatrix}, u \in D, A \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{F}, \tag{13}$$

матрица O_1 и вектор O_2 определены в задаче (11). Формально перезапишем (13) в виде системы

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & E \\ O_1 & \mathcal{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \hline v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \hline O_2 \end{bmatrix}, u \in D.$$

Назовём вектор $[u|v]^T$допустимым решением системы (13), если существует матрица $A \in \mathcal{A}$ и вектор $f \in \mathcal{F}$ такие, что

$$\begin{bmatrix} A & E \\ O_1 & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \hline v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \hline O_2 \end{bmatrix}, u \in D.$$

Обозначим через $\sigma = \{\Delta_{ij}, \delta_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\}$ – набор погрешностей из (6), а множество всех допустимых решений систем (13) через

$$W_1(\sigma) = \left\{w = [u \mid v]^T \in \mathbb{R}^{n+m}, u \in D: \begin{bmatrix} \mathcal{A} & E \\ O_2 & \mathcal{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \hline v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ O_2 \end{bmatrix}\right..$$

Множество $W_1(\sigma) \neq \emptyset$, так как система

$$\begin{bmatrix} \bar{A}\, E \\ O_1\, \bar{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \hline O_2 \end{bmatrix}, u \in D, \bar{A} \in \mathcal{A}, \bar{f} \in \mathcal{F}$$

всегда разрешима (смотрите (9) или (11)). Если рассмотреть задачу

$$\| w \|_I \to \inf, w = [u \mid v]^T \in W_1(\sigma), \tag{14}$$

то не очень понятно, как использовать её для получения приближённых решений задачи (12). Индивидуальные системы из множества $W_1(\sigma)$ несильно отличаются друг от друга и можно сказать, в рамках заданной точности Δ_{ij} и δ_i они эквивалентны.

Рассмотрим множество

$$W(\sigma) = \{w = [w_1 w_2 \dots w_n w_{n+1} \dots w_{n+m}]^T \in \mathbb{R}^{n+m}, u = [w_1, w_2, \dots, w_n] \in D:$$
$$\left|\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j} w_j + w_{n+i} - \tilde{f}_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} \cdot |w_j| + \delta_i, i = \overline{1,m},$$

$$\left.\left|\sum_{j=n+1}^{n+m}\tilde{a}_{j-ni-m}w_j\right|\leq\sum_{j=n+1}^{n+m}\Delta_{j-ni-m}|w_j|, i=\overline{m+1,m+n}\right\}.$$

Легко установить замкнутость множества $W(\sigma)$. Учитывая замкнутость множества D и непрерывность всех функционалов, входящих в соотношения, определяющих множество $W(\sigma)$, следуя аналогично [3, 5], можно доказать теорему 2.

Теорема 2. Множество $W_1(\sigma)$ эквивалентно множеству $W(\sigma)$.

Следовательно, множество $W(\sigma)\neq\emptyset$. Кроме того, $W\subseteq W_1(\sigma)\equiv W(\sigma)$ и множество $W(\sigma)$ являются расширением множества W из задачи (12).

Теперь задача

$$\| w \|_I\to\inf, w=[\,u\mid v\,]\in \mathrm{W}(\sigma), \quad (15)$$

эквивалентная задаче (14), является более конструктивной с вычислительной точки зрения, и мы описали в общих чертах метод поточечной невязки для решения задачи (14) с приближёнными данными $\{\tilde{A},\tilde{f}\}$.

Пусть $W_*(\sigma)=\{w=[u|v]^{\mathrm{T}}\in W:\| w \|=\tilde{\mu}_*, \tilde{\mu}_*=\inf\| w \|\}, w\in W(\sigma)$ – множество решений задачи (15).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (6), $U_D\neq\emptyset, D$ – замкнутое множество. Тогда множество $W_*(\sigma)=\emptyset$ и компактно.

Доказательство. Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, так как множество $W(\sigma)\neq\emptyset$ и замкнуто, функционал $\| w \|_I$ непрерывный и ограниченный снизу

$$\| w \|_I\geq 0.$$

Теорема доказана.

Для численного решения задачи (15) достаточно определить вектор $w=w(\sigma,\varepsilon)\in W(\sigma)$, удовлетворяющий условию

$$\| w \|_I\leqslant\tilde{\mu}_*+\varepsilon, \varepsilon\geq 0. \quad (16)$$

Множество таких векторов обозначим $W_*(\sigma,\varepsilon)$. Ниже покажем, что векторы $u_*(\sigma,\varepsilon)=[w_{*1}(\sigma,\varepsilon),w_{*2}(\sigma,\varepsilon),\dots,w_{*n}(\sigma,\varepsilon)]^T$, составленные из первых n компонент векторов

$$w_*(\sigma,\varepsilon)=[w_{*1}(\sigma,\varepsilon),w_{*2}(\sigma,\varepsilon),\dots,w_{*n}(\sigma,\varepsilon),\dots,w_{*n+m}(\sigma,\varepsilon)]^{\mathrm{T}}\in W_*(\sigma,\varepsilon)$$

решений задачи (16), аппроксимируют нормальные D-псевдорешения системы (3) с такой же точностью, как и точность задания входных данных $\{\bar{A},\bar{f}\}$ в (6).

3. Сходимость метода поточечной невязки. Обозначим через

$$\hat{\Delta}=\max_{i,j}\Delta_{ij}, \hat{\delta}=\max_{i}\delta_i.$$

Лемма 1. Для $\forall\, w\in W$ имеет место неравенство

$$\| \bar{B}w-\bar{f}\|_\infty\leqslant 2\big(\hat{\Delta}\cdot\| w \|_1+\hat{\delta}\big). \quad (17)$$

Доказательство. Из определения матрицы $\bar{B}=\{\bar{b}_{ij}\}\in\mathbb{R}^{m+n,m+n}$ и вектора $\bar{d}=\left[\bar{d}_1,\bar{d}_{2,\dots,}\bar{d}_m,0,0,\dots,0\right]^T\in\mathbb{R}^{m+n}$ в задаче (12), а также из условий (6) для $\forall\, w\in W(\sigma)$ и $i=\overline{1,m}$ нетрудно установить

$$\left|\sum_{j=1}^{n+m}\bar{b}_{ij}w_j-\bar{d}_i\right|\leqslant\left|\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}w_j+w_{n+i}-\bar{f}_i\right|=$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} w_j - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i_j} w_j + \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i_j} w_j + w_{n+i} - \tilde{f}_i + \tilde{f}_i - \bar{f}_i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \bar{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij} \right| \cdot \left| w_j \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} w_j + w_{n+i} - \tilde{f}_i \right| + \left| \tilde{f}_c - \bar{f}_c \right| \leq$$

$$\leq 2 \left(\sum_{j=1}^{n+m} \Delta_{ij} \left| w_j \right| + \delta_i \right) \leq 2\left(\hat{\Delta} \cdot \| w \|_1 + \hat{\delta}\right),$$

где $\| w \|_1 = |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_{n+m}|$, а для $i = \overline{m+1, n+m}$

$$\left| \sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij} w_j - \bar{d}_i \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{a}_{j-n,i-m} \cdot w_j \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{a}_{j-ni-m} \cdot w_j - \sum_{j=n+1}^{n+m} \tilde{a}_{j-ni-m} w_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} \tilde{a}_{j-ni-m} w_j \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{n+m} \left| \bar{a}_{j-ni-m} - \tilde{a}_{j-ni-m} \right| \cdot \left| w_j \right| + \left| \sum_{j=n+1}^{n+m} \tilde{a}_{j-ni-m} w_j \right| \leq$$

$$\leq 2 \left(\sum_{j=n+1}^{n+m} \Delta_{j-ni-m} \left| w_j \right| \right) \leqslant 2\hat{\Delta} \cdot \| w \|_1.$$

Из этих неравенств для $\forall\, w \in W(\sigma)$ следует

$$\| \bar{B} w - \vec{d} \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n+m} \left| \sum_{j=1}^{n+m} \bar{b}_{ij} w - \bar{d}_i \right| \leq 2\left(\hat{\Delta} \cdot \| w \|_1 + \hat{\delta}\right).$$

Лемма доказана.

Обозначим через

$$\beta(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \| x - y \|_2,$$

где β – расстояние между непустыми множествами $X \in \mathbb{R}^p, Y \in \mathbb{R}^p$,

$$\| x - y \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(x_j - y_j\right)^2}, x = \left[x_1, x_{2,\dots}, x_p\right]^T \in \mathbb{R}^p,$$

$$y = \left[y_1, y_{2,}, \dots, y_p\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p,$$

$U_*(\sigma, \varepsilon)$ – множество векторов $u_*(\sigma, \varepsilon) = [w_{*1}(\sigma, \varepsilon), w_{*2}(\sigma, \varepsilon), \dots, w_{*n}(\sigma, \varepsilon)]^T$, составленных из первых n компонент векторов

$$w_*(\sigma, \varepsilon) = [w_{*1}(\sigma, \varepsilon), w_{*2}(\sigma, \varepsilon), \dots, w_{*n}(\sigma, \varepsilon), w_{*n+1}(\sigma, \varepsilon), \dots, w_{*n+m}(\sigma, \varepsilon)]^T,$$
$$w_*(\sigma, \varepsilon) \in W_*(\sigma, \varepsilon) \subseteq W_*(\sigma) \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

U_* – множество нормальных D-псевдорешений системы (3), т.е. решений задач (7).

Теорема 4. Пусть D – замкнутое множество и выполнены условия (6). Тогда $\beta(U_*(\sigma, \varepsilon), U_*) \to 0$ при $\sigma \to 0, \varepsilon \to 0$.

Доказательство. Пусть

$$\{\widehat{\sigma}^k\} = \{\widehat{\Delta}^k, \widehat{\delta}^k\} \to 0, \{\varepsilon^k\} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

где $\widehat{\Delta}^k = \max_{i,j} \Delta_{i_j}^k, \widehat{\delta}^k = \max_i \delta_i^k$ – числовые последовательности.

Тогда по определению точной верхней грани существует последовательность $\{w^k\} = \{w(\widehat{\sigma}^k, \widehat{\varepsilon}^k\} \in W_*(\widehat{\sigma}^k, \varepsilon^k)$ такая, что

$$\beta(W_*(\widehat{\sigma}^k, \varepsilon^k), W_*) - \frac{1}{k} \leqslant \inf_{w \in W_*} \|w^k - w\|, k = 1,2, \dots \tag{18}$$

Так как $W \subseteq W(\sigma)$, то $\tilde{\mu}_* = \inf_{w \in W_*(\sigma)} \| w \|_I \leq \mu_* = \inf_{w \in W} \| w \|_I$.

Тогда из (16) имеем

$$\|w^k\|_I \leqslant \mu_* + \varepsilon^k. \tag{19}$$

Таким образом, последовательность $\{w^k\}$ ограничена. Из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, считаем, что сама последовательность $\{w^k\}$ сходится: $\{w^k\} \to w_*, k \to +\infty$.

Из соотношения (17) и (19) получим

$$\|\bar{B}w^k - \bar{d}\|_\infty \leqslant 2[\widehat{\Delta}^k \cdot (\mu_* + \varepsilon^k) + \widehat{\delta}^k].$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$, имеем $\|\bar{B}w_* - \bar{d}\|_\infty = 0$, что равносильно системе уравнений $\bar{B}w_* = \bar{d}$, т.е. $w_* \in W$. Тогда из (19) следует $\|w_*\| \leq \mu_*$ при $k \to +\infty$. Следовательно,

$$w_* \in W_* \text{ и } \lim_{k \to +\infty} \inf_{w \in \mathbb{W}_*} \|w^k - w\| = 0.$$

Из неравенства (18) при $k \to +\infty$ следует

$$\beta(W(\widehat{\sigma}^k, \varepsilon^k), W_*) \to 0. \tag{20}$$

Пусть $w_*^k = [w_{*1}^k, w_{*2}^k, \dots, w_{*n}^k, \dots, w_{*n+m}^k]^T$ – проекция вектора

$$w_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k) = [w_{*1}(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k), w_{*2}(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k), \dots, w_{*n}(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k), \dots, w_{*n+m}(\hat{\sigma}^k, \hat{\varepsilon}^k)]^T,$$
$$w_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k) \in W_*(\hat{\sigma}^k, \hat{\varepsilon}^k)$$

на множество W_* и $u_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k) = [w_{*1}(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k), w_{*2}(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k), \dots, w_{*n}(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k)]^T$ – вектор, составленный из первых n компонент вектора $w_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k)$. Как отмечено выше, вектор $u_*^k = [w_{*1}^k, v_{*2}^k, \dots, w_{*n}^k]^T$, составленный из первых n компонент вектора w_*^k, принадлежит множеству U_* – решений задачи (8).

Таким образом, получим

$$\inf_{u \in U_*} \|u_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k) - u\| = \|u_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k) - u_*^k\| \leq$$
$$\leq \|w_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k) - w_*^k\| = \inf_{\mathrm{w}^k \in W_*} \|w_*(\hat{\sigma}^k, \varepsilon^k) - w^k\|$$

Из этого неравенства и соотношения (20) следует утверждения теоремы при $k \to +\infty$. Теорема доказана.

4. Оценка погрешности аппроксимации. Получим оценку погрешности аппроксимации множества нормальных D-псевдорешений системы (3) множеством $U_*(\sigma, \varepsilon)$ для специального случая

$$\| u \|_I = \| u \|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j|, u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{gathered} D = \{u \in \mathbb{R}^n : \bar{A}^1 u = \bar{f}^1, \bar{A}^2 u \leq \bar{f}^2, \bar{A}^1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, \bar{A}^2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, \\ \bar{f}^1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \bar{f}^2 \in \mathbb{R}^{m_2}\}. \end{gathered} \tag{21}$$

Обозначим через

$$\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \| x - y \|_2$$

расстояние от вектора x до непустого множества Y.

Теорема 5. Пусть выполнены неравенства (6), $\| u \|_I = \| u \|_\infty$ в задаче (8) и множество D определено в (21). Тогда

$$\operatorname{Sup}_{u \in U_*(\sigma,\varepsilon)} \rho(u, U_*) = O\big(\hat{\Delta} + \hat{\delta} + \varepsilon\big). \tag{22}$$

Доказательство. Сначала мы покажем

$$\operatorname{Sup}_{w \in W_*(\sigma,\varepsilon)} \rho(w, W_*) = O\big(\hat{\Delta} + \hat{\delta} + \varepsilon\big). \tag{23}$$

Представим множество W_* в виде

$$W_* = \{w = [u|v]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+m}: \bar{A}^1 u = \bar{f}^1, \bar{A}^2 u \leqslant \bar{f}^2, \| u \|_\infty \leqslant \mu_*, \bar{B} w = \bar{d}\}$$

или, что есть то же самое,

$$W_* = \{w_k = [u \mid v]^T \in \mathbb{R}^{n+m}: \bar{A}^1 u = \bar{f}^1, \bar{A}^2 u \le \bar{f}^2, \mathrm{w}_s - \mu_* \le 0, -w_s - \mu_* \le 0,$$
$$s = \overline{1,n}, \bar{B} w = \bar{d}\},$$

где $\mu_* = \inf_{w \in W} \| w \|_\infty$.

Таким образом, W_* – полиэдр. Согласно лемме Хоффмана [3, 17, 25], существует константа $K > 0$, зависящая лишь от элементов матриц $\bar{A}^1 \bar{A}^2 \bar{B}$ такая, что выполнено неравенство

$$\rho(\mathrm{w}, W_*) \le K max \left\{ \begin{array}{c} \max_{1 \le s \le n} (w_s - \mu_*)^+, \max_{1 \le s \le n} (-w_s - \mu_*)^+, \\ \max_{1 \leqslant i \leqslant m_1} \left|\left(\bar{A}^1 u - \bar{f}^1\right)_i\right|, \max_{1 \leqslant i \leqslant m_2} \left(\bar{A}^2 u - \bar{f}^2\right)^+_i, \\ \max_{1 \leqslant i \leqslant (m+n)} \left|(\bar{B} w - \bar{d})_i\right| \end{array} \right\}, \tag{24}$$
$$\forall w \in \mathbb{R}^{n+m}$$

где $[w_s - \mu_*]^+ = \max\{0; w_s - \mu_*\}; [-(w_s) - \mu_*]^+ =$

$$= \max\{0, -w_s - \mu_*\}; \left(\bar{A}^2 u - \bar{f}^2\right)^+_i = \max\left\{0, \left(\bar{A}^2 - \bar{f}^2\right)_i\right\}.$$

В частности, для векторов $w_*(\sigma,\varepsilon) \in W_*(\sigma,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ неравенство (24) справедливо. Получим оценки для выражений в правой части неравенства (24) для $w = w_*(\sigma,\varepsilon) = [u_*(\sigma,\varepsilon) \mid v_*(\sigma,\varepsilon)]^T$. Так как $U = u_*(\sigma,\varepsilon) \in D$, то

$$\max_{1 \le i \le m_1} \left|\left(\bar{A}^1 u - \bar{f}^1\right)_i\right| = 0, \max_{1 \le i \le m_2} \left(\bar{A}^2 u - \bar{f}^2\right)^+_i = 0\,. \tag{25}$$

Аналогично (19) имеем $\|w_*(\sigma,\varepsilon)\|_\infty \leqslant \mu_* + \varepsilon$. Отсюда имеем

$$\max_{1 \le s \le n} (w_s - \mu_*)^+ \le \varepsilon, \max_{1 \le s \le n} (-w_s - \mu_*)^+ \le \varepsilon\,. \tag{26}$$

Используя неравенство (17), из леммы 1 для $\forall\, w_*(\sigma,\varepsilon) \in W_*(\sigma,\varepsilon)$ получим

$$\max_{1 \le i \le m+n} \mid \left(\bar{B} w - \bar{d}_i\right) \mid \le 2\big(\hat{\Delta} \cdot C + \hat{\delta}\big), \tag{27}$$

где C – константа, ограничивающая компактное множество $W_*(\sigma,\varepsilon)$.

Подставляя соотношения (25)–(27) в неравенство (24), имеем

$$\rho(w_*(\sigma,\varepsilon), W_*) \le 2 \cdot K\big(\hat{\Delta} \cdot c + \hat{\delta} + \varepsilon\big).$$

Отсюда следует соотношение (23). Аналогично, как и при доказательстве теоремы 4, получим

$$\inf_{u \in U_*} \|u_*(\sigma,\varepsilon) - u\| \leqslant \inf_{w \in W_*} \|w_*(\sigma,\varepsilon) - w\| = \rho(w_*(\sigma,\varepsilon), W_*), \tag{28}$$

где $v_*(\sigma,\varepsilon) = [w_{*1}(\sigma,\varepsilon), w_{*2}(\sigma,\varepsilon), \ldots, w_{*n}(\sigma,\varepsilon)]^T$ – вектор, составленный из первых n компонент вектора $w_*(\sigma,\varepsilon) \in W_*(\sigma,\varepsilon)$.

Из неравенства (28) следует соотношение (22). Теорема доказана.

Пусть $v_* = [w_{*n+1}, w_{*n+2}, \dots, w_{*n+m}]^T$ – вектор, составленный из последних m компонент вектора

$$w_* = [w_{*1}, w_{*2}, \dots, w_{*n}, w_{*n+1}, w_{*n+2}, \dots, w_{*n+m}]^T \in W_*$$

и $v_*(\sigma, \varepsilon) = [w_{*n+1}(\sigma, \varepsilon), w_{*n+2}(\sigma, \varepsilon), \dots, w_{*n+m}(\sigma, \varepsilon)]^T$ – вектор, составленный из последних m компонент вектора

$$w_*(\delta, \varepsilon) = [w_{*1}(\delta, \varepsilon), w_{*2}(\delta, \varepsilon), \dots, w_{*n}(\delta, \varepsilon), \dots, w_{*n+m}(\delta, \varepsilon)]^T \in W_*(\delta, \varepsilon).$$

Множества векторов вида v_*и $v_*(\delta, \varepsilon)$ обозначим через V_* и $V_*(\delta, \varepsilon)$ соответственно.

Теорема 6. При выполнении условий теоремы 5 имеем

$$\operatorname*{Sup}_{v \in V_*(\delta, \varepsilon)} \inf_{v_* \in V_*} |\, \|v\| - \|v_*\| \,| = O\left(\widehat{\Delta} + \widehat{\delta} + \varepsilon\right). \tag{29}$$

Доказательство. Соотношение (29) следует из (23) и неравенств

$$\inf_{v_* \in V_*} |\, \|v(\delta, \varepsilon)\| - \|v_*\| \,| \le \inf_{v_* \in V_*} \|v(\delta, \varepsilon) - v_*\| \le \inf_{w \in W_*} \|w(\delta, \varepsilon) - w\| \equiv$$
$$\equiv \rho(w_*(\delta, \varepsilon), W_*).$$

Теорема доказана.

Выводы. В данной работе предлагается идейно простой и надёжный устойчивый способ нахождения D-псевдорешения задачи (3) вне зависимости от того, что она имеет решение (совместна) или не имеет решения (несовместна). Для численного использования метода достаточно знать поточечную информацию о приближённых данных $\{\tilde{A}, \tilde{f}\}$ и поточечные погрешности их задания $\{\Delta_{ij}, \delta_i\}$. Этот метод непараметрический и приводит к однократному решению задачи минимизации (15). В частном случае, если в задаче (8) и множество D определено соотношениями (21), приближённые нормальные D-псевдорешения и мера несовместности $||v(\delta, \varepsilon)||$, получаемые из решения задачи (15) или (16), аппроксимируют нормальные D-псевдорешения системы (3) или, что то же самое, решения задачи (8) и меру несовместности системы (3) $y_* = \left||v_*|\right| = \left||f - \bar{A}u_*|\right|_2$ соответственно, с такой же точностью, что и порядок задания погрешностей в (6). Таким образом, метод, определяемый в (15), является оптимальным по порядку.

Литература

1. *Бабенко В.Н.* О структуре оценок близости псевдорешений исходной и возмущённых систем линейных алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 9. С. 1459–1481.

2. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 415 с.

3. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: МЦНМО, 2020. 412 с.

4. *Галба Е.Ф, Сергиенко И.В.* Методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. 2018. Т. 54, № 3. С. 1347–1363.

5. *Иваницкий А.Ю.* Устойчивые методы для решения систем линейных уравнений и неравенств с интервальными коэффициентами: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1988. 133 с.

6. *Иваницкий А.Ю.* Оценка скорости сходимости метода поточечной невязки для решения несовместных систем линейных алгебраических уравнений. Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. С. 46–53.

7. *Иваницкий А.Ю, Васильев Ф.П, Морозов В.А.* Метод поточечной невязки для решения некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 7. С. 1140–1459.

8. *Иваницкий А.Ю, Морозов В.А, Кармазин В.Н.* Метод поточечной невязки для решения несовместных систем и неравенств с приближёнными данными // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. № 3. С. 937–945.

9. *Леонов А.С.* Метод минимальной псевдообратной матрицы для решения некорректных задач линейной алгебры // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 285, № 1. С. 36–40.

10. *Леонов А.С.* Метод минимальной псевдообратной матрицы: теория и численная реализация // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31, № 10. С. 1427–1443.

11. *Леонов А.С.* Экстраоптимальные методы решения некорректно поставленных задач: обзор теории и примеры // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 6. С. 985–1012.

12. *Морозов В.А.* О псевдорешениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 196–203.

13. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклад АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.

14. *Bjorck A.* Numerical Methods for Least Squares Problem. SIAM, Philadelphia, 1996, 425 p.

15. *Demmel J.W.* Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, Philadelphia, 1997, 419 p.

16. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1997, 270 p.

17. *Hoffman A.* On Approximate Solutions of System of Linear Inequalities. *J. of Research of the Nat. Bureau of Stanfords*, 1952, no. 4, pp. 263–265.

18. *Ivanitskiy A.Yu., Vasil'ev F.P., Morozov V.A.* Pointwise residual methods for solving systems of linear alrebraic equations and inequalities. Ill-posed problems in Natural Sciences. VSP/TVP, Tokyo, 1992, pp. 33–43.

19. *Lawson C.L., Hanson R.J.* Solving Least Squares Problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974, 340 p.

20. *Mechenov A.S.* Pseudosolutions of Linear Functional Equations, Springer, 2005, 238 p.

21. *Morozov V.A.* Methods for Solving Incorrectly Posed Problems, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984, 257 p.

22. *Panyukov A.P., Golodov Y.A.* Computing Best Possible Pseudosolutions to Interval Linear Systems of Equations. *Reliable Computing*, 2018, vol. 19(6), pp. 215–228.

23. *Wedin P.-A.* Perturbation Theory for Pseudo-Inverses. *BIT Numerical Mathematics*, 1973, vol. 13, pp. 217–232.

24. *Shary S.P.* Interval Regularization for Imprecise Linear Algebraic Equations. In: Int. Conf. «Computational and Applied Mathematics 2017» (CAM 2017). Novosibirsk, 2017.

25. *Vasylyev F.P., Ivanitskiy A.Yu.* In-Depth Analysis of Linear Programming, Kluwer Academic Publishers. Dodrecht, Boston, London, 2001, 312 p.

26. *Watkins D.S.* Fundamental of Matrix Computations. John Willey, Sons, Inc., New York, 2015, 635 p.

ИВАНИЦКИЙ АЛЕКСАНДР ЮРЬЕВИЧ – кандидат физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики, физики и информационных технологий, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (ivanitskiy@hotmail.com).

КИСЕЛЁВ МИХАИЛ ВИТАЛЬЕВИЧ – кандидат технических наук, доцент, руководитель лаборатории «Нейроморфные вычисления», Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (mikhail.kiselev@kaspersky.com).

ВАСИЛЬКОВА МАРИНА ВЕНИАМИНОВНА – руководитель центра развития современных компетенций детей «Дом научной коллаборации имени С.А. Абрукова», Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (vasilkovam@mail.ru).

ЕЖОВ ВЛАДИМИР ВЛАДИМИРОВИЧ – доктор физико-математических наук, профессор, Флиндерский университет Южной Австралии, Австралия, Аделаида; Московский государственный университет, Россия, Москва (ejovvl@gmail.com).

Alexander Yu. IVANITSKIY, Mikhail V. KISELEV,
Marina V. VASILKOVA, Vladimir V. EJOV

A STABLE METHOD FOR FINDING NORMAL D-PSEUDOSOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH APPROXIMATE DATA AND MEASURES OF THEIR INCONSISTENCY

Key words: *D-pseudosolutions, measures of inconsistency, Fredholm integral equations of the first kind in engineering problems, pointwise residual method, estimate of approximate solutions.*

The research purpose *is to develop and fully mathematically justify a stable method for finding a normal D-pseudosolution of inconsistency systems of linear algebraic equations with approximate data.*
Materials and methods. *The paper uses an analogue of the Weirstrass theorem from the theory of optimization methods and the concept of norms in finite-dimensional spaces and extended version of Hoffman's lemma to determine the distance from an arbitrary point to a polyhedron.*
Research results. *The article proposes an ideologically simple, reliable and stable method – the pointwise residual method for finding D-pseudosolutions and measures of inconsistency of systems of linear algebraic equations, obtained during the approximation of Fredholm integral equations of the first kind, which describe a number of engineering tasks. To use this method, it is enough to know information of approximate data and estimates of their error. The convergence theorem of the method is proved and estimate of the convergence rate of the method of the same order as that of setting errors in the initial data is obtained. The method is optimal in order.*
Conclusions. *A new stable method for numerically finding a normal D-pseudosolution of systems of linear algebraic equations with approximate data in the absence of information about their solvability is proposed. This method is nonparametric and requires one time solving an optimization problem with piecewise linear constraints, and in some cases solving a quadratic programming problem.*

References

1. Babenko V.N. *O strukture otsenok blizosti psevdoreshenii iskhodnoi i vozmushchennykh sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii* [On the structure of estimates of the proximity of pseudosolutions of the initial and perturbed systems of linear alrebraic systems]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics (Zn. Vychisl. Mat. and Mat. Fiz.)*, 2019, vol. 59, no. 9, pp. 1459–1481.

2. Vasylyev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, Faktorial Press Publ., 2002, 412 p.

3. Vasylyev F.P., Ivanitskiy A.Yu. *Lineinoe programmirovanie* [Linear Programming]. Moscow, MCCME Publ., 2020, 412 p.

4. Galba E.F., Sergienko I.V. *Metody vychisleniya vzveshennykh psevdoobratnykh matrits i vzveshennykh normal'nykh psevdore-shenii s vyrozhdennymi vesami* [Methods for Computing Weighted Pseudoinverses and Weighted Normal Pseudosolutions with Singular Weights]. *Cybernetics and System Analysis*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 1347–1363.

5. Ivanitskiy A.Yu. *Ustoichivye metody dlya resheniya sistem lineinykh uravnenii i neravenstv s interval'nymi koeffitsientami: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Stable Methods for Solving Systems of Linear Equations and Tnequalities with Interval Coefficients: Cand. Diss.], Moscow, 1988, 133 p.

6. Ivanitskiy A.Yu. *Otsenka skorosti skhodimosti metoda potochechnoi nevyazki dlya resheniya nesovmestnykh sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii. Metody i algoritmy v chislennom analize* [Estimation of speed of convergence of pointwise residual method for solving inconsistency systems of linear alrebraic equations. Methods and Algorithms of Numerical Analysis]. Moscow, Moscow University Publ., 1990, pp. 46–53.

7. Ivanitskiy A.Yu., Vasylyev F.P., Morozov V.A. *Metod potochechnoi nevyazki dlya resheniya nekotorykh zadach lineinoi algebry i lineinogo pro-grammirovaniya* [Pointwise residual methods for solving some problems of linear algebraic and linear programming]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics (Zn. Vychisl. Mat. and Mat. Fiz.)*, 1998, vol. 38, no. 7, pp. 1140–1459.

8. Ivanitskiy A.Yu., Morozov V.A. and Karmazin V.N. *Metod potochechnoi nevyazki dlya resheniya nesovmestnykh sistem i neravenstv s priblizhennymi dannymi* [Pointwise discrepansy method for solution of inconsistency systems of equations and inequalities with approximate data]. *Fundamental and Applied Mathematics*, 1998, no. 3, pp. 937–945.

9. Leonov A.S. *Metod minimal'noi psevdoobratnoi matritsy dlya resheniya nekorrektnykh zadach lineinoi algebry* [Method of a minimum pseudoinverse matix for a solution of Ill-posed problems of linear algebra]. *Doklady Akademii nauk USSR*, 1985, vol. 285, no. 1, pp. 36–40.

10. Leonov A.S. *Metod minimal'noi psevdoobratnoi matritsy: teoriya i chislennaya realizatsiya* [Method of a minimum pseudoinverse matix: the theory and numerical realization]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics (Zn. Vychisl. Mat. and Mat. Fiz.)*, 1991, vol. 31, no. 10, pp. 1427–1443.

11. Leonov A.S. *Ekstraoptimal'nye metody resheniya nekorrektno postavlennykh zadach: obzor teorii i primery* [Extra-Optimal Methods for solving Ill-posed Problems: Survey of theory an Examples]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics (Zn. Vychisl. Mat. and Mat. Fiz.)*, 2020, vol. 60, no. 6, pp. 985–1012.

12. Morozov V.A. *O psevdoresheniyakh* [On pseudo-solutions]. *Computational and Mathematical Physics (Zn. Vychisl. Mat. and Mat. Fiz.)*, 1969, vol. 9, no. 6, pp. 196–203.

13. Tikhonov A.N. *O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii* [On the solution of Incorrectly Posed problems and the regularization method]. *Doklady Akademii nauk USSR*, 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501–504.

14. Bjorck A. Numerical Methods for Least Squares Problem. SIAM, Philadelphia, 1996, 425 p.

15. Demmel J.W. Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, Philadelphia, 1997, 419 p.

16. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1997, 270 p.

17. Hoffman A. On Approximate Solutions of System of Linear Inequalities. *J. of Research of the Nat. Bureau of Stanfords*, 1952, no. 4, pp. 263–265.

18. Ivanitskiy A.Yu., Vasil’ev F.P., Morozov V.A. Pointwise residual methods for solving systems of linear alrebraic equations and inequalities. Ill-posed problems in Natural Sciences. VSP/TVP, Tokyo, 1992, pp. 33–43.

19. Lawson C.L., Hanson R.J. Solving Least Squares Problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974, 340 p.

20. Mechenov A.S. Pseudosolutions of Linear Functional Equations, Springer, 2005, 238 p.

21. Morozov V.A. Methods for Solving Incorrectly Posed Problems, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984, 257 p.

22. Panyukov A.P., Golodov Y.A. Computing Best Possible Pseudosolutions to Interval Linear Systems of Equations. *Reliable Computing*, 2018, vol. 19(6), pp. 215–228.

23. Wedin P.-A. Perturbation Theory for Pseudo-Inverses. *BIT Numerical Mathematics*, 1973, vol. 13, pp. 217–232.

24. Shary S.P. Interval Regularization for Imprecise Linear Algebraic Equations. In: Int. Conf. «Computational and Applied Mathematics 2017» (CAM 2017). Novosibirsk, 2017.

25. Vasylyev F.P., Ivanitskiy A.Yu. In-Depth Analysis of Linear Programming, Kluwer Academic Publishers. Dodrecht, Boston, London, 2001, 312 p.

26. Watkins D.S. Fundamental of Matrix Computations. John Willey, Sons, Inc., New York, 2015, 635 p.

ALEXANDER Yu. IVANITSKIY – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Applied Mathematics, Physics and Information Technology, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (ivanitskiy@hotmail.com).

MIKHAIL V. KISELEV – Candidate of Technical Sciences, Head of the Neuromorphic Computing Laboratory, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (mikhail.kiselev@kaspersky.com).

MARINA V. VASILKOVA – Head of the Center for the Development of Modern Competencies of Children «House of Scientific Collaboration named by S.A. Abrukov», Chuvash State University, Russia, Cheboksary (vasilkovam@mail.ru).

VLADIMIR V. EJOV – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Flinders University of South Australia, Australia, Adelaida; Moscow State University, Russia, Moscow (ejovvl@gmail.com).

Формат цитирования: *Иваницкий А.Ю., Киселёв М.В., Василькова М.В., Ежов В.В.* Устойчивый метод нахождения нормальных D-псевдорешений систем линейных алгебраических уравнений с приближенными данными и меры их несовместности // Вестник Чувашского университета. – 2024. – № 2. – С. 54–66. DOI: 10.47026/1810-1909-2024-2-54-66.