

DOI: 10.47026/1810-1909-2024-4-14-35

УДК 621.314.5

ББК 31.15

Г.А. БЕЛОВ, Г.В. МАЛИНИН

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Ключевые слова: резонансный преобразователь постоянного напряжения типа LCC, метод основной гармоники, временной анализ, векторно-матричные уравнения, установившийся режим, внешняя характеристика, имитационное моделирование.

Аналитическое исследование резонансных преобразователей постоянного напряжения с целью их анализа и правильного проектирования является актуальной задачей. В настоящее время для решения этой задачи используются метод основной гармоники и метод временного анализа. Применение метода основной гармоники для анализа характеристик установившегося режима преобразователя типа LCC оказывается простым только при использовании LC-сглаживающего фильтра на его выходе. Для широко применяемого LCC-преобразователя с емкостным фильтром на выходе метод основной гармоники дает значительную погрешность. Поэтому характеристики LCC-преобразователя в настоящее время изучаются в основном методами временного анализа и имитационного моделирования.

Цель исследования – обоснование внешних характеристик преобразователя типа LCC методами основной гармоники и временного анализа и сравнение полученных результатов с результатами имитационного моделирования.

Материалы и методы. Математическое моделирование преобразователя проводилось методами теории цепей и автоматического управления. При исследовании преобразователя с использованием временного анализа использовались векторно-матричные методы решения дифференциальных уравнений, методы разделения движения и приспосовывания. Имитационное моделирование преобразователя проводилось в среде динамического моделирования MATLAB/Simulink.

Результаты исследований. Внешние (нагрузочные) характеристики преобразователей наравне с зависимостями коэффициента усиления напряжения от частоты переключений позволяют обосновать выбор типа преобразователя и рекомендации по их проектированию. Дан вывод внешних характеристик преобразователя и зависимостей тока короткого замыкания и напряжения холостого хода от частоты переключений методом основной гармоники. Временной анализ проведен для наиболее сложного трехинтервального на полупериоде переключений режима преобразователя. Векторно-матричным методом решены дифференциальные уравнения, описывающие процессы на трех интервалах линейности преобразователя. Получены аналитические соотношения, позволяющие рассчитывать переходные процессы методом приспосовывания и определять характеристики установившегося режима. Последнее существенно усложняется с увеличением числа интервалов линейности преобразователя на полупериоде переключений. Это объясняется тем, что перед расчетом характеристик установившегося режима приходится решать нелинейное уравнение этого режима, что сильно усложняется уже при трех интервалах линейности на полупериоде.

Выводы. Метод основной гармоники для LCC-преобразователя имеет ограниченное применение, поскольку дает приближенные результаты, которые уточняются более точными методами. Метод временного анализа является наиболее подходящим и точным методом исследования. Но его применение усложняется с ростом числа интервалов линейности преобразователя при анализе его установившегося режима работы.

Введение. Резонансные преобразователи постоянного напряжения (ППН) находят широкое применение при построении источников вторичного электропитания в силу высокого коэффициента полезного действия (КПД) и малых

электромагнитных помех. Поэтому в зарубежной литературе уделяется большое внимание их анализу и математическому описанию. Авторами работы выполнен анализ ряда структур резонансных ППН¹. Резонансные ППН с более сложным LC-контуром, чем простой последовательный LC-контур, на отдельных рабочих интервалах описываются дифференциальными уравнениями третьего порядка [1, 3, 8, 9, 14, 16], а при учете емкости обмоток трансформатора – уравнениями четвертого порядка² [7]. Поэтому точные методы исследования таких ППН оказываются сложными для практического использования, а наиболее простым и пригодным для практики является приближенный метод основной гармонике [2, 6, 8, 19]. Однако этот метод дает удовлетворительные результаты в режиме непрерывного тока колебательного контура и приближенные для режима прерывистого тока.

Метод временного анализа является точным методом исследования ППН. Изложенные в литературе методики и результаты временного анализа резонансных ППН зачастую отличаются недостаточной полнотой и неточностями в связи с принятыми упрощающими допущениями [5, 10, 12]. В работах авторов¹ изложены методики анализа и расчета переходных процессов в ППН, в которых используется T-образная эквивалентная схема трансформатора, учитываются активные сопротивления обмоток трансформатора. Авторами использовался универсальный метод поинтервального анализа ППН, основанный на векторно-матричном описании ППН на интервалах его линейности.

В настоящей работе продемонстрировано сравнение методов основной гармонике и временного анализа для расчета внешних характеристик ППН типа LCC, а также возможности метода временного анализа для расчета переходных процессов. Это обусловлено тем, что резонансные ППН типа LCC исследованы меньше всего из-за существенного усложнения их режимов работы и практической непригодности при их исследовании методом основной гармонике. Применение этого метода к ППН типа LCC, построенных с использованием сглаживающего выходного фильтра с емкостным входом, сопряжено с низкой точностью получаемых результатов [9, 17]. Существенным недостатком метода основной гармонике является также то, что он не позволяет проводить анализ и расчет переходных процессов в ППН. Поэтому характеристики ППН типа LCC в настоящее время изучаются в основном методами временного анализа и имитационного моделирования [11, 15, 16, 18].

¹ См.: Белов Г.А., Малинин Г.В. Векторно-матричный метод расчета переходных процессов в резонансном преобразователе постоянного напряжения типа LCL-T // Практическая силовая электроника. 2020. № 1(77). С. 28–37; Анализ резонансного преобразователя постоянного напряжения типа LCL-T методом основной гармонике / Г.А. Белов, Г.В. Малинин, В.И. Мелешин, Ю.М. Семенов // Электротехника. 2019. № 8. С. 26–31; Расчет и моделирование переходных процессов в резонансном преобразователе постоянного напряжения типа LLC / Г.А. Белов, Г.В. Малинин, Л.С. Севриков, Ю.М. Семенов // Электротехника. 2020. № 8. С. 23–30; Белов Г.А., Павлова А.А. Анализ резонансного преобразователя постоянного напряжения типа LLC методом основной гармонике // Практическая силовая электроника. 2018. № 1(69). С. 2–10.

² См.: Белов Г.А., Серебрянников А.В., Семенов Ю.М. Влияние емкости трансформатора на процессы в резонансном преобразователе в режиме прерывистого тока // Практическая силовая электроника. 2021. № 1(81). С. 8–20.

Целью исследования является сравнение методов основной гармоник и временного анализа для обоснования внешних характеристик резонансного преобразователя типа LCC.

Материалы и методы. На рис. 1, *а* представлена схема силовой части резонансного ППН типа LCC с мостовым транзисторным инвертором и мостовым диодным выпрямителем, на рис. 1, *б*, *в* и *г* приведены эквивалентные схемы ППН типа LCC для интервалов времени, когда ППН можно считать линейным.

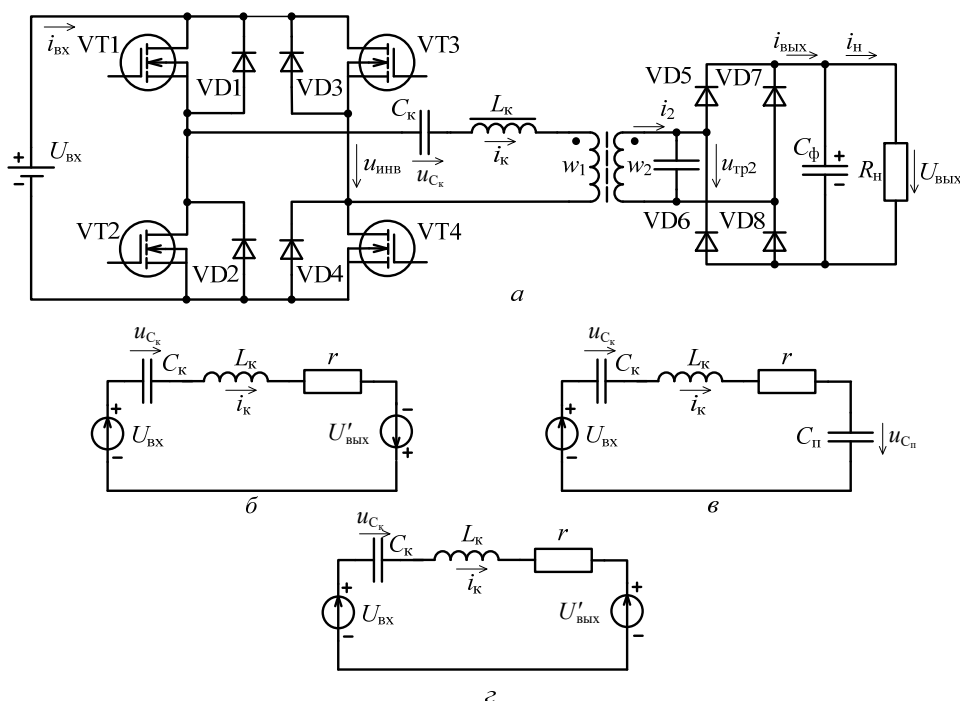


Рис. 1. Структура и эквивалентные схемы резонансного LCC-преобразователя:

а – схема силовой части;

б, *в*, *г* – эквивалентные схемы преобразователя для интервалов t_1 , t_2 и t_3 соответственно

На рис. 2 представлены временные диаграммы для ППН в случае, когда частота переключений $f = 1/T$ превышает резонансную частоту $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{L_k C_k})$ последовательной LC-цепи L_k – C_k . Ток $i_k(t)$ почти синусоидальной формы отстает по фазе на угол $\varphi_1 = \omega t_1$ относительно первой гармоники напряжения $u_{инв}(t)$ на выходе инверторного моста. Ток намагничивания трансформатора принимается малым и на рис. 2 не учитывается.

Кривая напряжения $u_{Cп}(t)$ на параллельно подключенной емкости $Cп$ (рис. 1, *в*) отличается наличием интервалов его перезаряда от $-U'_{вых}$ до $+U'_{вых}$ (интервал t_2) и от $+U'_{вых}$ до $-U'_{вых}$, на которых все диоды выходного выпрямителя закрыты. Здесь $U'_{вых} = U_{вых}/n_{тр}$ – выходное напряжение ППН, приведенное

к первичной обмотке трансформатора; $n_{тр} = w_2 / w_1$ – коэффициент трансформации трансформатора, w_1, w_2 – число витков первичной и вторичной обмоток. На интервале t_2 справедлива эквивалентная схема, показанная на рис. 1, в.

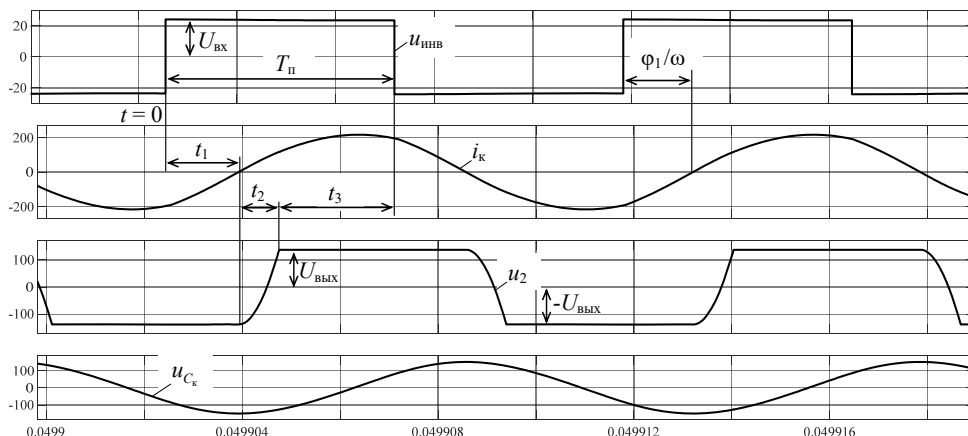


Рис. 2. Временные диаграммы LCC-преобразователя, работающего на активную нагрузку $R_H = 10$ Ом. Моделирование проводилось при следующих параметрах схемы: $U_{ВК} = 24$ В; $C_K = 2,2$ мкФ; $L_K = 1,2$ мкГн; $n_{тр} = w_2 / w_1 = 9,5$; активное сопротивление колебательного контура $r = 3$ мОм; емкость конденсатора, подключенного параллельно вторичной обмотке трансформатора, составляет $0,0195$ мкФ ($K_C = 0,8$); частота переключения силовых ключей $f = 107750$ Гц ($\omega_H = 1,1$)

Положительный полупериод работы ППН, на котором $u_{инв} > 0$, складывается из трех интервалов: $T_п = t_1 + t_2 + t_3$. В момент времени $t = 0$ подаются отпирающие импульсы на затворы транзисторов VT1 и VT4. В работе принято, что процессы отпираания и запираания транзисторов и диодов протекают мгновенно. Ток контура $i_k(t)$ на интервале t_1 отрицателен и замыкается через обратные диоды VD1 и VD4, поэтому процессы отпираания транзисторов VT1 и VT4 протекают при наличии на них обратного напряжения, равного падению напряжения на открытых диодах. Таким образом, отпираение транзисторов происходит практически при нулевом значении напряжения ППН, или в англоязычной транскрипции *zero voltage switching (ZVS)*.

На интервале t_1 открыты диоды VD6, VD7 выпрямителя, через которые выходное напряжение $U_{ВЫХ}$ прикладывается к вторичной обмотке трансформатора, $u_2 = -U_{ВЫХ}$. Становится справедливой эквивалентная схема, представленная на рис. 1, б.

В момент $t = t_1$ ток контура i_k меняет направление. При пренебрежении влиянием тока намагничивания в этот момент диоды VD6, VD7 выпрямителя закрываются, а другая пара диодов VD5, VD8 открыться не может из-за того, что напряжение на вторичной обмотке трансформатора $u'_{тр2} = u_{Cк}$ по модулю меньше $U_{ВЫХ}$. Становится справедливой эквивалентная схема, показанная на рис. 1, в.

На интервале t_2 все диоды выходного выпрямителя закрыты, нагрузка ППН отключена от LC-контура, происходит перезаряд емкости C_{Π} от напряжения $-U'_{\text{ВЫХ}}$ до $+U'_{\text{ВЫХ}}$. В момент $t = t_1 + t_2$ открывается пара диодов VD5, VD8 выходного выпрямителя, начинается интервал t_3 , на котором конденсатор небольшой емкости, включенный параллельно вторичной обмотке, оказывается соединенным параллельно с конденсатором выходного фильтра значительно большей емкости. Становится справедливой эквивалентная схема на рис. 1, 2. Напряжение $u_{C_{\Pi}}$ на емкости C_{Π} далее остается равным $U'_{\text{ВЫХ}}$ вплоть до момента перехода через нуль тока i_k на следующем полупериоде, а на рассматриваемом полупериоде участок с напряжением $u_{C_{\Pi}} = U'_{\text{ВЫХ}}$ имеет длительность t_3 .

В момент времени $t = t_1 + t_2 + t_3 = T_{\Pi} = T/2$ подаются отпирающие импульсы на затворы транзисторов VT2 и VT3 и начинается интервал, аналогичный интервалу t_1 на первом полупериоде. В связи с симметрией схемы инвертора процесс на втором (отрицательном) полупериоде протекает аналогично процессу на первом (положительном) полупериоде.

Результаты исследований

Метод основной гармоники. Ток в последовательном LC-контуре $i_k(t)$ принимается синусоидальным и зависящим только от первой гармоники напряжения на выходе инверторного моста $u_{\text{ИНВ}}$ и нагрузки ППН. Для первой гармоники напряжения $u_{\text{ИНВ}(1)}$ с амплитудой $U_{\text{ВХ}}$ справедливо равенство

$$\sqrt{2}U_{\text{ИНВ}(1)} = \frac{4U_{\text{ВХ}}}{\pi}, \quad (1)$$

где $U_{\text{ИНВ}(1)}$ – действующее значение этой гармоники.

Для использования метода основной гармоники в ППН типа LCC необходимо определить первую гармонику напряжения u_2 . Эта задача усложняется тем, что напряжение u_2 имеет примерно трапецеидальную форму с неизвестными длительностями фронта и спада. Для упрощения анализа принимаем напряжение на входе выходного выпрямителя симметричной прямоугольной формы с амплитудой $U_{\text{ВЫХ}}$ и фронтами (спадами), возникающими в моменты перехода тока $i_k(t)$ через нуль. Тогда амплитуда первой гармоники этого напряжения определяется выражением

$$\sqrt{2}U_{2(1)} = \frac{4U_{\text{ВЫХ}}}{\pi}, \quad (2)$$

где $U_{2(1)}$ – действующее значение первой гармоники на вторичной обмотке трансформатора. При синусоидальном токе в обмотках трансформатора выходной ток ППН, поступающий на конденсатор фильтра, получается путем выпрямления тока вторичной обмотки. Среднее значение выходного тока

$$I_{\text{ВЫХ}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{2}I_2,$$

откуда амплитудное значение тока вторичной обмотки

$$\sqrt{2}I_2 = \frac{\pi}{2} I_{\text{ВЫХ}},$$

где I_2 – действующее значение тока вторичной обмотки.

Поскольку при принятых допущениях напряжение на вторичной обмотке u_2 и ток этой обмотки i_2 изменяются синфазно, имеет смысл активное входное сопротивление выпрямителя для первой гармоники относительно зажимов вторичной обмотки

$$R_{в.вх(1)} = \frac{\sqrt{2}U_{2(1)}}{\sqrt{2}I_2} = \frac{8}{\pi^2} \frac{U_{в.вх}}{I_{в.вх}},$$

где $U_{в.вх} / I_{в.вх} = R_H$ – сопротивление нагрузки ППН.

Таким образом,

$$R_{в.вх(1)} = \frac{8}{\pi^2} R_H \quad (3)$$

и становится понятной эквивалентная схема ППН, показанная на рис. 3, где для общности учтена индуктивность намагничивания L_μ , что делает эту схему пригодной и для анализа LLC-преобразователя.

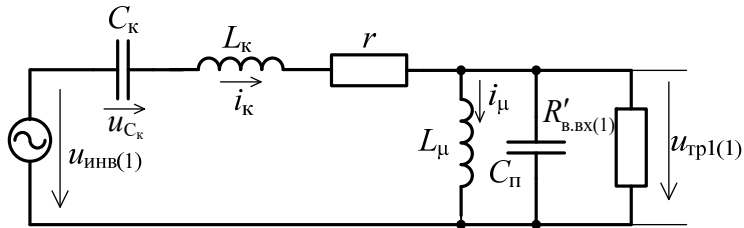


Рис. 3. Эквивалентная схема для анализа резонансных ППН методом основной гармоники

Обратим внимание на то, что в формуле (3) сопротивление R_H означает отношение среднего значения выходного напряжения $U_{в.вх}$ и среднего значения выходного тока $I_{в.вх}$, т.е. под нагрузкой не обязательно понимается активное сопротивление R_H .

Определим передаточную функцию показанной на рис. 3 цепи:

$$W_{(1)}(p) = \frac{U_{тр1(1)}(p)}{U_{инв(1)}(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)},$$

где

$$Z_1(p) = \frac{1}{pC_k} + pL_k + r = \frac{L_k C_k p^2 + rC_k p + 1}{pC_k};$$

$$Z_2(p) = \frac{1}{pC_\pi + \frac{1}{pL_\mu} + \frac{1}{R'_{в.вх(1)}}} = \frac{R'_{в.вх(1)}}{pR'_{в.вх(1)}C_\pi + 1 + \frac{R'_{в.вх(1)}}{pL_\mu}}.$$

Преобразуем выражения $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ при $p = j\omega$:

$$Z_1 = Z_1(j\omega) = \frac{1 - L_k C_k \omega^2 + j\omega r C_k}{j\omega C_k};$$

$$Z_2 = Z_2(j\omega) = \frac{R'_{\text{в.вх}(1)}}{1 + j\omega R'_{\text{в.вх}(1)} C_{\text{п}} + \frac{R'_{\text{в.вх}(1)}}{j\omega L_{\mu}}} = \frac{R'_{\text{в.вх}(1)}}{1 + jR'_{\text{в.вх}(1)} \left(\omega C_{\text{п}} - \frac{1}{\omega L_{\mu}} \right)}.$$

Введем следующие обобщенные параметры: нормированную частоту $\omega_{\text{н}} = \omega \sqrt{L_{\text{к}} C_{\text{к}}}$; добротности $Q = \sqrt{L_{\text{к}}/C_{\text{к}}}/R'_{\text{в.вх}(1)}$ и $Q_{\text{к}} = \sqrt{L_{\text{к}}/C_{\text{к}}}/r$; отношение индуктивностей $K_L = L_{\mu}/L_{\text{к}}$; отношение емкостей $K_C = C_{\text{п}}/C_{\text{к}}$.

Подставив в формулы для Z_1 и Z_2 величины

$$\omega = \frac{\omega_{\text{н}}}{\sqrt{L_{\text{к}} C_{\text{к}}}}, \quad R'_{\text{в.вх}(1)} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L_{\text{к}}}{C_{\text{к}}}}, \quad r = \frac{1}{Q_{\text{к}}} \sqrt{\frac{L_{\text{к}}}{C_{\text{к}}}}, \quad (4)$$

выраженные через введенные обобщенные параметры, получим

$$Z_1 = -j \sqrt{\frac{L_{\text{к}}}{C_{\text{к}}}} \frac{1 - \omega_{\text{н}}^2 + j \omega_{\text{н}}/Q_{\text{к}}}{\omega_{\text{н}}}, \quad Z_2 = \frac{\sqrt{L_{\text{к}}/C_{\text{к}}}}{Q \left(1 + j \frac{K_L K_C \omega_{\text{н}}^2 - 1}{Q K_L \omega_{\text{н}}} \right)}. \quad (5)$$

Согласно схеме на рис. 3 найдем

$$W_{(1)}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 - jQ \left(1 + j \frac{K_L K_C \omega_{\text{н}}^2 - 1}{Q K_L \omega_{\text{н}}} \right) \frac{1 - \omega_{\text{н}}^2 + j \omega_{\text{н}}/Q_{\text{к}}}{\omega_{\text{н}}}}$$

или после несложных преобразований –

$$W_{(1)}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{Q}{Q_{\text{к}}} + \left(K_C - \frac{1}{K_L \omega_{\text{н}}^2} \right) (1 - \omega_{\text{н}}^2) - j \left[\frac{Q(1 - \omega_{\text{н}}^2)}{\omega_{\text{н}}} - \frac{K_L K_C \omega_{\text{н}}^2 - 1}{Q_{\text{к}} K_L \omega_{\text{н}}} \right]}. \quad (6)$$

Выражение (6) может быть использовано для анализа резонансного ППН типа LLC (при $K_C = 0$), ППН типа LCC (при $K_L \rightarrow \infty$), а также для анализа ППН, в котором необходимо учитывать влияние как тока намагничивания трансформатора, так и емкости $C_{\text{п}}$ [9].

Поскольку амплитудные значения первых гармоник напряжений на выходе инверторного моста $u_{\text{инв}(1)}$ и на вторичной обмотке трансформатора $u_{2(1)}$ определяются по формулам (1) и (2), справедливо равенство

$$\left| W_{(1)}(j\omega) \right| = \frac{U'_{2(1)}}{U_{\text{инв}(1)}} = \frac{U'_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \bar{U}_{\text{вых}}. \quad (7)$$

Согласно (7) величина $\left| W_{(1)}(j\omega) \right|$ представляет собой коэффициент передачи напряжения ППН на частоте переключений $\omega = 2\pi f$, как называют эту величину в зарубежных публикациях. Мы эту величину будем называть относительным выходным напряжением $\bar{U}_{\text{вых}}$ [2].

Поскольку КПД современных резонансных ППН обычно превышает 90%, активное сопротивление LC-контура r слабо влияет на ток в LC-контуре.

Поэтому, как и в зарубежных публикациях, будем полагать $r = 0$. Тогда в (6) необходимо считать, что $Q_K \rightarrow \infty$, следовательно, получим

$$W_{(1)}(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(K_C - \frac{1}{K_L \omega_H^2} \right) (1 - \omega_H^2) - j \frac{Q(1 - \omega_H^2)}{\omega_H}},$$

модуль этого выражения

$$|W_{(1)}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(K_C - \frac{1}{K_L \omega_H^2} \right) (1 - \omega_H^2) \right]^2 + Q^2 \left(\frac{\omega_H^2 - 1}{\omega_H} \right)^2}}. \quad (8)$$

Далее примем $K_L \rightarrow \infty$ и будем проводить анализ для частного случая (8) – ППН типа LCC

$$|W_{(1)}(j\omega)|_{LCC} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + K_C (1 - \omega_H^2) \right]^2 + Q^2 \left(\frac{\omega_H^2 - 1}{\omega_H} \right)^2}}. \quad (9)$$

Чтобы получить формулу для расчета внешних характеристик ППН, учтем тождество (7), а также (3) и (4):

$$R'_{в.вх(1)} = \frac{8}{\pi^2} R'_H = \frac{8}{\pi^2} \frac{U'_{ВЫХ}}{I'_{ВЫХ}};$$

$$Q = \frac{1}{R'_{в.вх(1)}} \sqrt{\frac{L_K}{C_K}} = \frac{\pi^2}{8} \sqrt{\frac{L_K}{C_K}} \frac{I'_{ВЫХ}}{U'_{ВЫХ}}.$$

Тогда из (9) получим уравнение

$$\frac{U'_{ВЫХ}}{U_{ВХ}} \sqrt{\left[1 + K_C (1 - \omega_H^2) \right]^2 + \left(\frac{\omega_H^2 - 1}{\omega_H} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{8} \sqrt{\frac{L_K}{C_K}} \frac{I'_{ВЫХ}}{U'_{ВЫХ}} \right)^2} = 1.$$

Отсюда найдем

$$(\bar{U}_{ВЫХ})_{LCC} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi^2}{8} \frac{\omega_H^2 - 1}{\omega_H} \right)^2 \bar{I}_{ВЫХ}^2}}{|1 + K_C (1 - \omega_H^2)|}, \quad (10)$$

где $\bar{I}_{ВЫХ} = \sqrt{\frac{L_K}{C_K}} \frac{I'_{ВЫХ}}{U_{ВХ}}$.

Важными параметрами внешних характеристик являются ток короткого замыкания $I_{ВЫХ.КЗ}$ и напряжение холостого хода $U_{ВЫХ.ХХ}$. Полагая в формуле (10) $\bar{U}_{ВЫХ} = 0$, получаем выражение для тока короткого замыкания

$$\bar{I}_{ВЫХ.КЗ} \Big|_{r=0} = \frac{8\omega_H}{\pi^2 |\omega_H^2 - 1|}.$$

Подставляя в (10) $\bar{I}_{\text{ВЫХ}} = 0$, найдем выражение для напряжения холостого хода $\bar{U}_{\text{ВЫХ.ХХ}}$ в функции нормированной частоты переключений ω_n :

$$\left(\bar{U}_{\text{ВЫХ.ХХ}}\right)_{LCC} = \frac{1}{\left|1 + K_C \left(1 - \omega_n^2\right)\right|}.$$

На рис. 4 представлены внешние характеристики ППН типа LCC, построенные по формуле (10). На этом же рисунке точками показаны результаты, полученные на Simulink-модели с параметрами $L_K = 1,2$ мкГн, $C_K = 2,2$ мкФ, $n_{\text{тр}} = w_2/w_1 = 9,5$. Сопротивление нагрузки R_n и емкость C_n варьировались для изменения тока нагрузки и коэффициента K_C . Характеристики построены как для частот переключения, превышающих резонансную частоту f_0 ($\omega_n > 1$), так и меньших резонансной частоты ($\omega_n < 1$). Видно, что для ППН типа LCC заметные отличия имеют место не только в режимах, близких к холостому ходу, но и при средних нагрузках.

Анализ зависимостей тока короткого замыкания и напряжения холостого хода ППН подробно рассмотрен в [2].

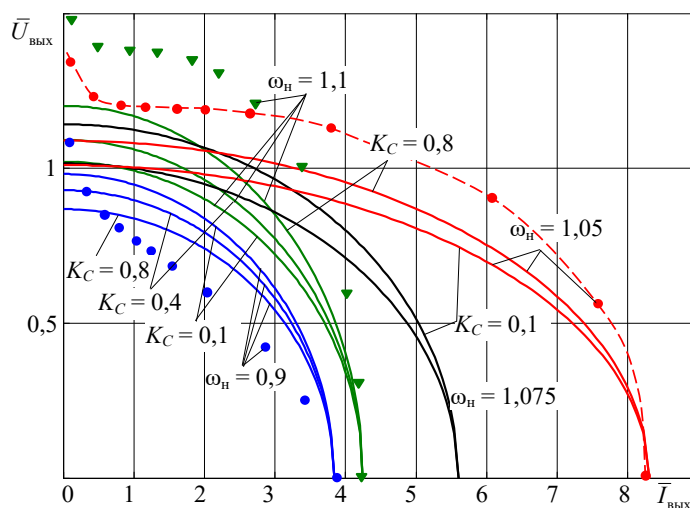


Рис. 4. Внешние характеристики ППН типа LCC, построенные методом основной гармоники

Метод временного анализа. Временной анализ можно проводить различными методами, используемыми для решения систем дифференциальных уравнений. Векторно-матричный метод применялся для получения динамических моделей импульсных преобразователей еще в работе [13]. В работах, касающихся резонансных преобразователей, данный метод нашел пока еще ограниченное применение, несмотря на все его преимущества.

Для эквивалентной схемы на рис. 1, б на интервале t_1 справедливы уравнения

$$L \frac{di_K}{dt} + r i_K + u_{C_K} = U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}}; \quad C_K \frac{du_{C_K}}{dt} = i_K,$$

которые могут быть записаны в векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 v_1, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} i_k \\ u_{C_k} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{r}{L_k} & -\frac{1}{L_k} \\ \frac{1}{C_k} & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad v_1 = U_{\text{вх}} + U'_{\text{вых}}.$$

Решение уравнения (11) при постоянстве внешнего воздействия на рассматриваемом интервале при $v_1 = \text{const}$ имеет вид [4]

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_1 t} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{t_1}(\infty)] + \mathbf{x}^{t_1}(\infty), \quad (12)$$

где $e^{\mathbf{A}_1 t}$ – фундаментальная (переходная) матрица уравнения (11), определяемая как

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = \mathbf{\Phi}(t) = \begin{Bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{Bmatrix}; \quad (13)$$

$\mathbf{x}^{t_1}(\infty)$ – асимптотическое значение вектора $\mathbf{x}(t)$ на интервале t_1 , определяемое из уравнения (11) при $dx/dt = 0$; $\mathbf{x}^{t_1}(\infty) = -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1 v_1$.

Элементы переходной матрицы $e^{\mathbf{A}_1 t}$ определены в предыдущей работе авторов¹:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(t) &= e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_k t - \frac{\alpha}{\omega_k} \sin \omega_k t \right), & \Phi_{12}(t) &= -\frac{1}{\omega_k L_k} e^{-\alpha t} \sin \omega_k t, \\ \Phi_{21}(t) &= \frac{1}{\omega_k C_k} e^{-\alpha t} \sin \omega_k t, & \Phi_{22}(t) &= e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_k t + \frac{\alpha}{\omega_k} \sin \omega_k t \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где α и ω_k – коэффициент затухания и собственная частота резонансного контура на рис. 1, б, определяемые выражениями

$$\alpha = \frac{r}{2L_k}; \quad \omega_k = \sqrt{\frac{1}{L_k C_k} - \alpha^2}.$$

Из (12) определяется значение вектора $\mathbf{x}(t)$ в конце интервала t_1

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}_1 t_1} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{t_1}(\infty)] + \mathbf{x}^{t_1}(\infty), \quad (15)$$

где $\mathbf{x}^{t_1}(\infty) = \begin{Bmatrix} 0 \\ U_{\text{вх}} + U'_{\text{вых}} \end{Bmatrix}$ (это следует из рис. 1, б); $\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} i_k(0) \\ u_{C_k}(0) \end{Bmatrix}$.

Из (15) с учетом выражения (13) и $\mathbf{x}^{t_1}(\infty)$ следуют скалярные выражения

$$\begin{aligned} i_k(t_1) &= \Phi_{11}(t_1) i_k(0) + \Phi_{12}(t_1) [u_{C_k}(0) - U_{\text{вх}} - U'_{\text{вых}}], \\ u_{C_k}(t_1) &= \Phi_{21}(t_1) i_k(0) + \Phi_{22}(t_1) [u_{C_k}(0) - U_{\text{вх}} - U'_{\text{вых}}] + U_{\text{вх}} + U'_{\text{вых}}. \end{aligned}$$

¹ См: Белов Г.А., Павлова А.А. Анализ резонансного преобразователя постоянного напряжения типа LLC методом основной гармоники // Практическая силовая электроника. 2018. № 1(69). С. 2–10.

Время t_1 можно рассчитать из уравнения $i_k(t_1) = 0$, или

$$\Phi_{11}(t_1)i_k(0) + \Phi_{12}(t_1)[u_{C_k}(0) - U_{\text{вх}} - U'_{\text{вых}}] = 0. \quad (16)$$

На следующем за интервалом t_1 интервале t_2 перезаряда параллельно включенной емкости $C_{\text{п}}$ от напряжения $-U'_{\text{вых}}$ до $+U'_{\text{вых}}$ справедлива эквивалентная схема, представленная на рис. 1, в, для которой справедливы уравнения

$$\begin{aligned} L_k \frac{di_k}{dt} + ri_k + u_{C_k} + u_{C_{\text{п}}} &= U_{\text{вх}}, \\ C_k \frac{du_{C_k}}{dt} &= i_k, \\ C_{\text{п}} \frac{du_{C_{\text{п}}}}{dt} &= i_k. \end{aligned} \quad (17)$$

Суммируя уравнения, получающиеся из второго и третьего уравнений (17) делением на C_k и $C_{\text{п}}$ соответственно, получим

$$\frac{du_{C_{\Sigma}}}{dt} = \frac{1}{C_{\Sigma}} i_k, \quad (18)$$

$$\text{где } u_{C_{\Sigma}} = u_{C_k} + u_{C_{\text{п}}}, \quad C_{\Sigma} = \frac{C_k C_{\text{п}}}{C_k + C_{\text{п}}} = \frac{C_{\text{п}}}{1 + K_C} = \frac{K_C C_k}{1 + K_C}.$$

Видно, что $C_{\Sigma} < C_{\text{п}}$, $C_{\Sigma} < C_k$.

Таким образом, система из трех дифференциальных уравнений первого порядка (17) сводится к системе из двух уравнений, включающей в себя первое уравнение (17) и уравнение (18). Эту систему представим в векторно-матричной форме

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}_2 \mathbf{y} + \mathbf{B}_2 v_2, \quad (19)$$

где вектор состояния \mathbf{y} и матрица \mathbf{A}_2 отличаются от \mathbf{x} и \mathbf{A}_1 :

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} i_k \\ u_{C_{\Sigma}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{r}{L_k} & -\frac{1}{L_k} \\ \frac{1}{C_{\Sigma}} & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ L_k \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad v_2 = U_{\text{вх}}.$$

Решение уравнения (19) имеет вид, аналогичный (12),

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}_2(t-t_1)} [\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}^{t_2}(\infty)] + \mathbf{y}^{t_2}(\infty), \quad (20)$$

где переходная матрица $e^{\mathbf{A}_2 t}$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}_2 t} &= \mathbf{G}(t) = \begin{Bmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) \\ G_{21}(t) & G_{22}(t) \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{y}(t_1) &= \begin{Bmatrix} i_k(t_1) \\ u_{C_{\Sigma}}(t_1) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{y}^{t_2}(\infty) = \begin{Bmatrix} 0 \\ U_{\text{вх}} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

В момент t_1 справедливы равенства

$$i_k(t_1) = 0, \quad u_{C_\Sigma}(t_1) = u_{C_k}(t_1) + u_{C_\Pi}(t_1).$$

Элементы переходной матрицы $e^{A_2 t}$ определяются аналогично (14):

$$G_{11}(t) = e^{-\alpha_2 t} \left(\cos \omega_2 t - \frac{\alpha_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \quad G_{12}(t) = -\frac{1}{\omega_2 L_k} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t,$$

$$G_{21}(t) = \frac{1}{\omega_2 C_\Sigma} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t, \quad G_{22}(t) = e^{-\alpha_2 t} \left(\cos \omega_2 t + \frac{\alpha_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right),$$

где $\alpha_2 = \frac{r}{2L_k} = \alpha$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_k C_\Sigma} - \alpha_2^2}$.

Из формулы (20) следуют скалярные выражения для интервала t_2

$$i_k(t) = G_{12}(t - t_1) \left[u_{C_\Sigma}(t_1) - u_{C_\Sigma}^{i_2}(\infty) \right],$$

$$u_{C_\Sigma}(t) = G_{22}(t - t_1) \left[u_{C_\Sigma}(t_1) - u_{C_\Sigma}^{i_2}(\infty) \right] + u_{C_\Sigma}^{i_2}(\infty),$$

где учтены тождества $i_k(t_1) = 0$, $i_k^{i_2}(\infty) = 0$.

Необходимо также учесть, что $u_{C_\Sigma}(t_1) = u_{C_k}(t_1) - U'_{\text{ВЫХ}}$, $u_{C_\Sigma}^{i_2}(\infty) = U_{\text{ВХ}}$.

Тогда

$$i_k(t) = G_{12}(t - t_1) \left[u_{C_k}(t_1) - U_{\text{ВХ}} - U'_{\text{ВЫХ}} \right],$$

$$u_{C_\Sigma}(t) = G_{22}(t - t_1) \left[u_{C_k}(t_1) - U_{\text{ВХ}} - U'_{\text{ВЫХ}} \right] + U_{\text{ВХ}}.$$
(21)

Для того чтобы распределить напряжение $u_{C_\Sigma} = u_{C_k} + u_{C_\Pi}$ между емкостями C_k и C_Π , последовательно включенными на интервале $t_1 \leq t \leq t_1 + t_2$, проинтегрируем равенства

$$C_k \frac{du_{C_k}}{dt} = C_\Sigma \frac{du_{C_\Sigma}}{dt}; \quad C_\Pi \frac{du_{C_\Pi}}{dt} = C_\Sigma \frac{du_{C_\Sigma}}{dt},$$

вытекающие из (17) и (18). Тогда найдем

$$u_{C_k}(t) = u_{C_k}(t_1) + \frac{C_\Sigma}{C_k} \left[u_{C_\Sigma}(t) - u_{C_\Sigma}(t_1) \right],$$

$$u_{C_\Pi}(t) = u_{C_\Pi}(t_1) + \frac{C_\Sigma}{C_\Pi} \left[u_{C_\Sigma}(t) - u_{C_\Sigma}(t_1) \right].$$

С учетом выражений $u_{C_\Pi}(t_1) = -U'_{\text{ВЫХ}}$, $u_{C_\Sigma}(t_1) = u_{C_k}(t_1) - U'_{\text{ВЫХ}}$ и тождеств

$$\frac{C_\Sigma}{C_k} = \frac{K_C}{1 + K_C}, \quad \frac{C_\Sigma}{C_\Pi} = \frac{1}{1 + K_C}$$

получим для $t_1 \leq t \leq t_1 + t_2$

$$u_{C_k}(t) = u_{C_k}(t_1) + \frac{K_C}{1 + K_C} \left[u_{C_\Sigma}(t) - u_{C_k}(t_1) + U'_{\text{ВЫХ}} \right],$$

$$u_{C_\Pi}(t) = -U'_{\text{ВЫХ}} + \frac{1}{1 + K_C} \left[u_{C_\Sigma}(t) - u_{C_k}(t_1) + U'_{\text{ВЫХ}} \right].$$
(22)

Из уравнения, получающегося при подстановке в первое равенство (22) $t = t_1 + t_2$, $u_{C_2}(t_1 + t_2) = u_{C_1}(t_1 + t_2) + U'_{\text{ВЫХ}}$, найдем значение $u_{C_1}(t)$ в конце интервала t_2

$$u_{C_1}(t_1 + t_2) = u_{C_1}(t_1) + 2K_C U'_{\text{ВЫХ}}. \quad (23)$$

Уравнения для определения времени t_2 получается при подстановке во второе выражение (21) $t = t_1 + t_2$, $u_{C_2}(t_1 + t_2) = u_{C_1}(t_1 + t_2) + U'_{\text{ВЫХ}}$:

$$G_{22}(t_2) \left[u_{C_1}(t_1) - U_{\text{ВХ}} - U'_{\text{ВЫХ}} \right] + U_{\text{ВХ}} - U'_{\text{ВЫХ}} - u_{C_1}(t_1 + t_2) = 0, \quad (24)$$

где $u_{C_1}(t_1)$ определяется по формуле (15).

Таким образом, с учетом (21) и (23) имеем выражения для координат вектора $\mathbf{x}(t)$ в момент $t = t_1 + t_2$. Первая координата получается из (21) при $t = t_1 + t_2$:

$$i_k(t_1 + t_2) = G_{12}(t_2) \left[u_{C_1}(t_1) - U_{\text{ВХ}} - U'_{\text{ВЫХ}} \right],$$

вторая координата задается выражением (23). В матричной форме имеем

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t_1) + \begin{vmatrix} -(U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}})G_{12}(t_2) \\ 2K_C U'_{\text{ВЫХ}} \end{vmatrix}, \quad (25)$$

где матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 0 & G_{12}(t_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

вырожденная, что не создает каких-либо сложностей, но позволяет реализовать расчет методом припасовывания.

При подстановке выражения (15) формула (25) принимает вид

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \mathbf{S}\mathbf{x}(0) + \mathbf{Q}(\mathbf{1} - e^{\mathbf{A}t_1})\mathbf{x}^{t_1}(\infty) + \begin{vmatrix} -(U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}})G_{12}(t_2) \\ 2K_C U'_{\text{ВЫХ}} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t_1} &= \begin{vmatrix} 0 & G_{12}(t_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t_1) & \Phi_{12}(t_1) \\ \Phi_{21}(t_1) & \Phi_{22}(t_1) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} G_{12}(t_2)\Phi_{21}(t_1) & G_{12}(t_2)\Phi_{22}(t_1) \\ \Phi_{21}(t_1) & \Phi_{22}(t_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}, \\ S_{11} &= G_{12}(t_2)\Phi_{21}(t_1), \\ S_{12} &= G_{12}(t_2)\Phi_{22}(t_1), \\ S_{21} &= \Phi_{21}(t_1), \\ S_{22} &= \Phi_{22}(t_1). \end{aligned} \quad (26)$$

Второе слагаемое в правой части выражения для $\mathbf{x}(t_1 + t_2)$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{1} - e^{\mathbf{A}t_1})\mathbf{x}^{t_1}(\infty) = \begin{vmatrix} 0 & G_{12}(t_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 - \Phi_{11}(t_1) & -\Phi_{12}(t_1) \\ -\Phi_{21}(t_1) & 1 - \Phi_{22}(t_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}}) \begin{vmatrix} 0 & G_{12}(t_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\Phi_{12}(t_1) \\ 1 - \Phi_{22}(t_1) \end{vmatrix} = (U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}}) \begin{vmatrix} G_{12}(t_2)[1 - \Phi_{22}(t_1)] \\ 1 - \Phi_{22}(t_1) \end{vmatrix} = \\
 &= (U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}})[1 - \Phi_{22}(t_1)] \cdot \begin{vmatrix} G_{12}(t_2) \\ 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тогда выражение для $\mathbf{x}(t_1 + t_2)$ с учетом (26) принимает вид

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \mathbf{S}\mathbf{x}(0) + U_{\text{ВХ}} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 - S_{22} \end{vmatrix} + U'_{\text{ВЫХ}} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 + 2K_C - S_{22} \end{vmatrix}. \quad (27)$$

На интервале t_3 длительностью $t_3 = T_{\text{п}} - t_1 - t_2$ справедлива эквивалентная схема, представленная на рис. 1, 2, процесс снова описывается переходной матрицей $e^{A_1 t}$. Справедливо выражение

$$\mathbf{x}(t) = e^{A_1(t-t_1-t_2)} [\mathbf{x}(t_1 + t_2) - \mathbf{x}^{t_3}(\infty)] + \mathbf{x}^{t_3}(\infty), \quad (28)$$

где асимптотическое значение вектора $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}^{t_3}(\infty) = \begin{vmatrix} 0 \\ U_{\text{ВХ}} - U'_{\text{ВЫХ}} \end{vmatrix}$$

отличается от $\mathbf{x}^{t_1}(\infty)$. При подстановке $t = T_{\text{п}} = t_1 + t_2 + t_3$ из (28) следует формула

$$\mathbf{x}(T_{\text{п}}) = e^{A_1 t_3} [\mathbf{x}(t_1 + t_2) - \mathbf{x}^{t_3}(\infty)] + \mathbf{x}^{t_3}(\infty),$$

которая при подстановке выражения (27) принимает вид

$$\mathbf{x}(T_{\text{п}}) = \mathbf{N}\mathbf{x}(0) + U_{\text{ВХ}} e^{A_1 t_3} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 - S_{22} \end{vmatrix} + U'_{\text{ВЫХ}} e^{A_1 t_3} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 + 2K_C - S_{22} \end{vmatrix} + (\mathbf{1} - e^{A_1 t_3}) \mathbf{x}^{t_3}(\infty),$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} = e^{A_1 t_3} \mathbf{S} &= \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t_3) & \Phi_{12}(t_3) \\ \Phi_{21}(t_3) & \Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{vmatrix}; \\
 N_{11} &= \Phi_{11}(t_3)S_{11} + \Phi_{12}(t_3)S_{21}, \\
 N_{12} &= \Phi_{11}(t_3)S_{12} + \Phi_{12}(t_3)S_{22}, \\
 N_{21} &= \Phi_{21}(t_3)S_{11} + \Phi_{22}(t_3)S_{21}, \\
 N_{22} &= \Phi_{21}(t_3)S_{12} + \Phi_{22}(t_3)S_{22}.
 \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом выражения для $\mathbf{x}^{t_3}(\infty)$ имеем

$$(\mathbf{1} - e^{A_1 t_3}) \mathbf{x}^{t_3}(\infty) = (U_{\text{ВХ}} - U'_{\text{ВЫХ}}) \begin{vmatrix} 1 - \Phi_{11}(t_3) & -\Phi_{12}(t_3) \\ -\Phi_{21}(t_3) & 1 - \Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = (U_{\text{ВХ}} + U'_{\text{ВЫХ}}) \begin{vmatrix} -\Phi_{12}(t_3) \\ 1 - \Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix}.$$

Тогда формулу для $\mathbf{x}(T_{\text{п}})$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}(T_{\text{п}}) = \mathbf{N}\mathbf{x}(0) + U_{\text{ВХ}} \mathbf{M}_1 + U'_{\text{ВЫХ}} \mathbf{M}_2, \quad (30)$$

где матрицы-столбцы

$$\mathbf{M}_1 = e^{A_1 t_3} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 - S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\Phi_{12}(t_3) \\ 1 - \Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = e^{A_1 t_3} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 + 2K_C - S_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\Phi_{12}(t_3) \\ 1 - \Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix}.$$

Рассматривая выражение (30) как разностное уравнение при $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(n)$, $\mathbf{x}(T_n) = \mathbf{x}(n+1)$, где n – дискретное время, можно изучать нелинейную динамику преобразователя.

Преобразуем выражения для \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 :

$$e^{A_1 t_3} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 - S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t_3) & \Phi_{12}(t_3) \\ \Phi_{21}(t_3) & \Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 - S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -S_{12}\Phi_{11}(t_3) + (1 - S_{22})\Phi_{12}(t_3) \\ -S_{12}\Phi_{21}(t_3) + (1 - S_{22})\Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{vmatrix} -S_{12}\Phi_{11}(t_3) - S_{22}\Phi_{12}(t_3) \\ 1 - S_{12}\Phi_{21}(t_3) - S_{22}\Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix}; \quad (31)$$

$$e^{A_1 t_3} \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 + 2K_C - S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t_3) & \Phi_{12}(t_3) \\ \Phi_{21}(t_3) & \Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -S_{12} \\ 1 + 2K_C - S_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -S_{12}\Phi_{11}(t_3) + (1 + 2K_C - S_{22})\Phi_{12}(t_3) \\ -S_{12}\Phi_{21}(t_3) + (1 + 2K_C - S_{22})\Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} -S_{12}\Phi_{11}(t_3) + (2 + 2K_C - S_{22})\Phi_{12}(t_3) \\ -1 - S_{12}\Phi_{21}(t_3) + (2 + 2K_C - S_{22})\Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix}. \quad (32)$$

В установившемся режиме справедливо равенство $\mathbf{x}(T_n) = -\mathbf{x}(0)$, после подстановки в которое выражения (30) получаем уравнение для определения $\mathbf{x}(0)$:

$$\mathbf{x}(0) = -(\mathbf{1} + \mathbf{N})^{-1} (U_{\text{вх}} \mathbf{M}_1 + U'_{\text{вых}} \mathbf{M}_2), \quad (33)$$

где

$$(\mathbf{1} + \mathbf{N})^{-1} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 + N_{22} & -N_{12} \\ -N_{21} & 1 + N_{11} \end{vmatrix},$$

$$D = \det(\mathbf{1} + \mathbf{N}) = (1 + N_{11})(1 + N_{22}) - N_{12}N_{21} = 1 + N_{11} + N_{22} + \det \mathbf{N}.$$

Определитель матрицы \mathbf{N} согласно (29)

$$\det \mathbf{N} = \det(e^{A_1 t_3}) \det \mathbf{S},$$

где, как видно из (26),

$$\det \mathbf{S} = \det(\mathbf{Q}e^{A_1 t_3}) = \det \mathbf{Q} \det(e^{A_1 t_3}) = 0,$$

поскольку $\det \mathbf{Q} = 0$. Тогда $\det \mathbf{N} = 0$ и с учетом (26) и (29)

$$D = N_{11} + N_{22} = G_{12}(t_2) [\Phi_{11}(t_3)\Phi_{21}(t_1) + \Phi_{21}(t_3)\Phi_{22}(t_1)] +$$

$$+ \Phi_{12}(t_3)\Phi_{21}(t_1) + \Phi_{22}(t_3)\Phi_{22}(t_1).$$

Решение уравнения (33) представляется в виде

$$\mathbf{x}(0) = U_{\text{вх}} \boldsymbol{\alpha} + U'_{\text{вых}} \boldsymbol{\beta}, \quad (34)$$

где матрицы-столбцы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} = -(\mathbf{1} + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{M}_1 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 + N_{22} & -N_{12} \\ -N_{21} & 1 + N_{11} \end{vmatrix} \mathbf{M}_1;$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} = -(\mathbf{1} + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{M}_2 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 + N_{22} & -N_{12} \\ -N_{21} & 1 + N_{11} \end{vmatrix} \mathbf{M}_2.$$

После подстановки (31) и (32) получаем

$$\alpha = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 + N_{22} & -N_{12} \\ -N_{21} & 1 + N_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -S_{12}\Phi_{11}(t_3) - S_{22}\Phi_{12}(t_3) \\ 1 - S_{12}\Phi_{21}(t_3) - S_{22}\Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix};$$

$$\beta = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 + N_{22} & -N_{12} \\ -N_{21} & 1 + N_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -S_{12}\Phi_{11}(t_3) + (2 + 2K_C - S_{22})\Phi_{12}(t_3) \\ -1 - S_{12}\Phi_{21}(t_3) + (2 + 2K_C - S_{22})\Phi_{22}(t_3) \end{vmatrix}.$$

Преобразование выражений для матриц α и β позволяет найти

$$\alpha_1 = \frac{2}{D} \Phi_{22}(t_1) [G_{12}(t_2)\Phi_{11}(t_3) + \Phi_{12}(t_3)];$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{D} \{1 + G_{12}(t_2) [\Phi_{21}(t_1)\Phi_{11}(t_3) - \Phi_{22}(t_1)\Phi_{21}(t_3)] +$$

$$+ \Phi_{21}(t_1)\Phi_{12}(t_3) - \Phi_{22}(t_1)\Phi_{22}(t_3)\};$$

$$\beta_1 = \frac{2}{D} (1 + K_C) [e^{-2\alpha t_3} G_{12}(t_2)\Phi_{22}(t_1) - \Phi_{12}(t_3)];$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{D} \{2(1 + K_C) [\Phi_{22}(t_3) + e^{-2\alpha t_3} G_{12}(t_2)\Phi_{21}(t_1)] -$$

$$- 1 - G_{12}(t_2)\Phi_{21}(t_1 + t_3) - \Phi_{22}(t_1 + t_3)\}.$$

Среднее значение выходного тока определяется выражением

$$I'_{\text{вых.ср}} = \frac{1}{T_{\Pi}} \left(-\int_0^{t_1} i_k(t) dt + \int_{t_1+t_2}^{T_{\Pi}} i_k(t) dt \right),$$

которое преобразуется к виду

$$I'_{\text{вых.ср}} = ci_k(0) + du_{C_k}(0) + g_1 U_{\text{вх}} + g_2 U'_{\text{вых}}, \quad (35)$$

где

$$c = \frac{C_k}{T_{\Pi}} \{S_{11}\Phi_{21}(t_3) + S_{21}[\Phi_{22}(t_3) - 1] - \Phi_{21}(t_1)\},$$

$$d = \frac{C_k}{T_{\Pi}} \{S_{12}\Phi_{21}(t_3) + S_{22}[\Phi_{22}(t_3) - 1] + 1 - \Phi_{22}(t_1)\},$$

$$g_1 = -\frac{C_k}{T_{\Pi}} \{S_{12}\Phi_{21}(t_3) + S_{22}[\Phi_{22}(t_3) - 1] - \Phi_{22}(t_1) + 1\},$$

$$g_2 = \frac{C_k}{T_{\Pi}} \{-S_{12}\Phi_{21}(t_3) + (2 + 2K_C - S_{22})[\Phi_{22}(t_3) - 1] + \Phi_{22}(t_1) - 1\}.$$

Представим уравнение (16) для определения t_1 в виде

$$\left\| \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t_1) & \Phi_{12}(t_1) \\ \Phi_{21}(t_1) & \Phi_{22}(t_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_k(0) \\ u_{C_k}(0) \end{vmatrix} \right\| = \Phi_{12}(t_1)(U_{\text{вх}} + U'_{\text{вых}}),$$

и подставим в него выражение (35):

$$\left\| \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t_1) & \Phi_{12}(t_1) \\ \Phi_{21}(t_1) & \Phi_{22}(t_1) \end{vmatrix} \left(U_{\text{вх}} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} + U'_{\text{вых}} \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} \right) \right\| = \Phi_{12}(t_1)(U_{\text{вх}} + U'_{\text{вых}}),$$

после преобразований получим

$$U_{\text{вх}} [\Phi_{11}(t_1)\alpha_1 + \Phi_{12}(t_1)\alpha_2 - \Phi_{12}(t_1)] + U'_{\text{вых}} [\Phi_{11}(t_1)\beta_1 + \Phi_{12}(t_1)\beta_2 - \Phi_{12}(t_1)] = 0. \quad (36)$$

Поскольку величины $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ зависят не только от t_1 , но и от t_2 , уравнение (36) содержит две неизвестные t_1 и t_2 .

Уравнение (24) для определения времени t_2 в установившемся режиме также превращается в уравнение с двумя неизвестными. С учетом (23) и (34) это уравнение принимает вид

$$U_{\text{вх}} [G_{22}(t_2) - 1] [\Phi_{21}(t_1)\alpha_1 + \Phi_{22}(t_1)\alpha_2 - \Phi_{22}(t_1)] + \\ + U'_{\text{вых}} \{ [G_{22}(t_2) - 1] [\Phi_{21}(t_1)\beta_1 + \Phi_{22}(t_1)\beta_2 - \Phi_{22}(t_1)] - 2 - 2K_C \} = 0. \quad (37)$$

Исключая $U'_{\text{вых}}$ из равенств (36) и (37), получим уравнение с неизвестными t_1 и t_2 :

$$[G_{22}(t_2) - 1] [\Phi_{21}(t_1)\alpha_1 + \Phi_{22}(t_1)\alpha_2 - \Phi_{22}(t_1)] - \frac{\Phi_{11}(t_1)\alpha_1 + \Phi_{12}(t_1)\alpha_2 - \Phi_{12}(t_1)}{\Phi_{11}(t_1)\beta_1 + \Phi_{12}(t_1)\beta_2 - \Phi_{12}(t_1)} \times \\ \times \{ [G_{22}(t_2) - 1] [\Phi_{21}(t_1)\beta_1 + \Phi_{22}(t_1)\beta_2 - \Phi_{22}(t_1)] - 2 - 2K_C \} = 0,$$

которое позволяет, задаваясь значениями t_1 , вычислить значения t_2 .

По заданным значениям t_1 и найденным t_2 по формуле, получающейся из уравнения (36),

$$\bar{U}_{\text{вых}} = - \frac{\Phi_{11}(t_1)\alpha_1 + \Phi_{12}(t_1)\alpha_2 - \Phi_{12}(t_1)}{\Phi_{11}(t_1)\beta_1 + \Phi_{12}(t_1)\beta_2 - \Phi_{12}(t_1)}$$

рассчитываем относительные значения выходного напряжения $\bar{U}_{\text{вых}} = U'_{\text{вых}} / U_{\text{вх}}$.

По формуле (35) рассчитываем относительные значения выходного тока $\bar{I}_{\text{вых}} = \sqrt{L_k / C_k} I'_{\text{вых}} / U_{\text{вх}}$ и строим внешние характеристики преобразователя.

Для проверки правильности полученных аналитических соотношений результаты расчетов сравнивались с результатами имитационного моделирования преобразователя в среде MATLAB/Simulink. Как и при рассмотрении метода основной гармоники, расчеты и моделирование проводились при следующих параметрах схемы: $U_{\text{вх}} = 24$ В; $C_k = 2,2$ мкФ; $L_k = 1,2$ мкГн; $n_{\text{тр}} = w_2 / w_1 = 9,5$; активное сопротивление колебательного контура $r = 3$ мОм; емкость конденсатора, подключенного параллельно вторичной обмотке трансформатора, составляет 0,0049 мкФ при $K_C = 0,2$ и 0,0195 мкФ при $K_C = 0,8$.

По полученным соотношениям построены внешние характеристики ППН типа ЛСС, на которые нанесены результаты имитационного моделирования преобразователя (рис. 5). Видно отличное совпадение результатов математического и имитационного моделирования. Однако если режим короткого замыкания на характеристиках просматривается, то режим холостого хода нет. Это связано с тем, что при определенной нагрузке преобразователь переходит в режим, отличный от рассмотренного на рис. 1, и расчет по полученным формулам невозможен. На этом же рисунке представлены внешние характеристики ЛСС-преобразователя, построенные методом основной гармоники и с использованием временного анализа. Эти характеристики уточняют ранее приведенные на рис. 4 характеристики.

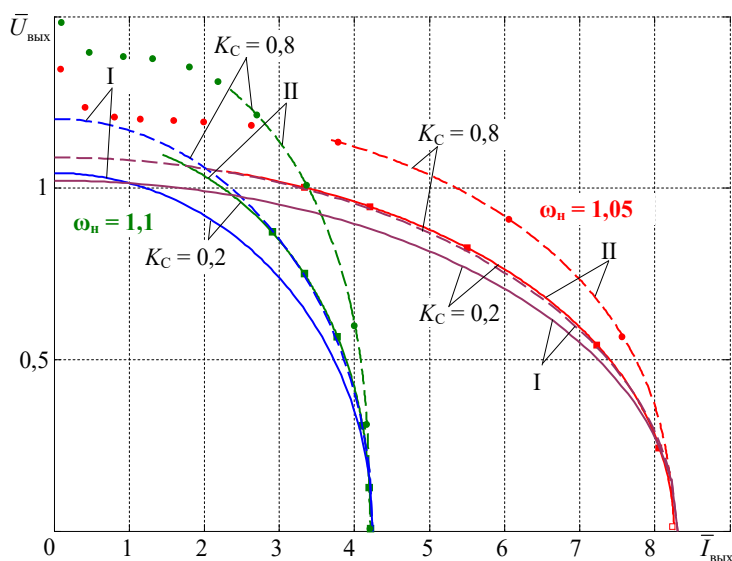


Рис. 5. Внешние характеристики LCC-преобразователя, построенные по формулам метода основной гармоники (I) и временного анализа (II)

Из рис. 5 видно, что метод основной гармоники дает значительные погрешности. Например, для $\omega_n = 1,05$ и относительного тока $\bar{I}_{\text{вых}} = 5$ отклонение относительного выходного напряжения по методу основной гармоники от аналогичной величины, полученной методом временного анализа, для $K_C = 0,8$ составляет 16%, а для $K_C = 0,2$ – 7%. С ростом емкости конденсатора, подключенного к зажимам вторичной обмотки конденсатора, погрешность увеличивается, что объясняется все большим отклонением формы напряжения на вторичной обмотке от прямоугольной.

Выводы. 1. Метод основной гармоники является приближенным, может использоваться для анализа характеристик установившегося режима при непрерывном токе в LC-контуре некоторых резонансных преобразователей, но непригоден для изучения переходных процессов в преобразователях.

2. Исследование резонансного ППН типа LCC требует проведения поинтервального временного анализа, который позволяет получить точные характеристики преобразователя.

3. Временной анализ ППН типа LCC с расчетом переходных процессов методом припасовывания в принципе возможен при любом числе интервалов линейности ППН на полупериоде T_n . Но вывод выражений для расчета характеристик установившегося режима при числе интервалов больше двух оказывается очень сложной задачей, поскольку требует решения нелинейных уравнений для определения длительностей этих интервалов в установившемся режиме.

4. При выводе аналитических соотношений методом временного анализа может быть получено разностное уравнение преобразователя, которое может использоваться для анализа нелинейной динамики резонансного преобразователя.

Литература

1. Анализ характеристик установившегося режима резонансных преобразователей типа LLC / Г.А. Белов, Г.В. Малинин, Л.С. Севриков, Ю.М. Семенов // Электротехника. 2021. № 8. С. 15–20.
2. Белов Г.А., Малинин Г.В. Сравнение резонансных преобразователей постоянного напряжения типов LLC и LCC // Практическая силовая электроника. 2023. № 3(91). С. 2–10.
3. Осипов А.В., Запольский С.А. Вольтодобавочный резонансный LCL-T преобразователь для автономных систем электропитания на возобновляемых источниках энергии // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2018. Т. 329, № 3. С. 77–88.
4. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
5. Awasthi A., Bagawade S., Kumar A., Jain P. Time-Domain Analysis of APWM-Frequency Modulated Low-Q LLC Resonant Converter for Wide Input and Load Range Applications. *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2019, pp. 1334–1340. DOI: 10.1109/ECCE.2019.8912706.
6. Abdel-Rahman S. Resonant LLC Converter: Operation and Design. Application Note AN2012-09, 2012, Infineon Technologies North America (IFNA) Corp. Available at: https://www.infineon.com/dgdl/Application_Note_Resonant+LLC+Converter+Operation+and+Design_Infineon.pdf?fileId=db3a30433a047ba0013a4a60e3be64a1 (Access Date: 2024, Aug. 12).
7. Borage M., Nagesh K.V., Bhatia M.S., Tiwari S. Design of LCL-T Resonant Converter Including the Effect of Transformer Winding Capacitance. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2009, vol. 56, no. 5, pp. 1420–1427. DOI: 10.1109/TIE.2012.2227897.
8. Borage M., Tiwari S., Kotaiah S. Analysis and Design of an LCL-T Resonant Converter as a Constant-Current Power Supply. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 1547–1554. DOI: 10.1109/TIE.2005.858729.
9. Gilbert A.J. Analysis, Design and Control of LCC Resonant Power Converters. Boston, University of Sheffield, 2007, 204 p.
10. Glitz E.S., Ordonez M. MOSFET Power Loss Estimation in LLC Resonant Converters: Time Interval Analysis. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2019, vol. 34, iss. 12, pp. 11964–11980. DOI: 10.1109/TPEL.2019.2909903.
11. Fan S., Li H., Wang Z., Yuan Y. Time Domain Analysis and Efficiency Research of High Voltage Power Supply for Electron Beam Welder Based on LCC Resonance in DCM. In: *IEEE 20th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, 2017, pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICEMS.2017.8056097.
12. Kumar A., Awasthi A., Salari O. et al. A Novel Time Domain Analysis of the LLC-L Resonant Converter for the Use of the CLL and LLC Resonant Converter. *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, 2019, pp. 3453–3460. DOI: 10.1109/APEC.2019.8722120.
13. Middlebrook R.D., Cuk S. A general unified approach to modeling switching-converter power stages. In: *IEEE PESC Record*. New York, 1976, pp. 18–34. DOI: 10.1109/PESC.1976.707289.
14. Nagarajan C., Madheswaran M. Performance Estimation of LCL-T Resonant Converter with Fuzzy/PID Controller Using State Space Analysis. *International Journal of Computer and Electrical Engineering*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 534–542. DOI: 10.1007/s00202-011-0203-9.
15. Pawellek A., Bucher A., Duerbaum T. Resonant LCC converter for low-profile applications. In: *15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference*, 2010, pp. 1309–1314. DOI: 10.1109/MELCON.2010.5475966.
16. Soeiro T.B., Mühlethaler J., Linnér J. et al. Automated Design of a High-Power High Frequency LCC Resonant Converter for Electrostatic Precipitators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, vol. 60, no. 11, pp. 4805–4819.
17. Steigerwald R.L. A comparison of Half-Bridge Resonant Converter Topologies. *IEEE Trans. Power Electronics*, 1988, vol. 3, no. 2, pp. 174–182. DOI: 10.1109/APEC.1987.7067142.
18. Zhang Haifeng, Wang Peng. Design of an LCC Resonant Converter for Furnace Power Supply during Electron Beam Melting. *IEEJ Journal of Industry Applications*, 2017, vol. 6, pp. 387–394. DOI: 10.1541/ieejia.6.387.

19. Zouggar S., Nait Charif H., Azizi M. Neural control and transient analysis of the LCL-type resonant converter. *The European Physical Journal AP*, 2000, vol. 11, no. 1, pp. 21–26. DOI: 10.1051/epjap:2000142.

БЕЛОВ ГЕННАДИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры промышленной электроники, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (belovga2020@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-6427-417X>).

МАЛИНИН ГРИГОРИЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ – кандидат технических наук, заведующий кафедрой промышленной электроники, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (malgrig6@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3993-0435>).

Gennadiy A. BELOV, Grigoriy V. MALININ

METHODS OF RESEARCH OF RESONANT CONVERTERS

Key words: LCC-type resonant DC-DC converter, fundamental harmonic method, time domain analysis, vector-matrix equations, steady state mode, external characteristic of the converter, simulation modeling.

Analytical study of DC-DC resonant converters for the purpose of their analysis and correct design is a topical task. Currently, the fundamental harmonic method and the time domain analysis method are used to solve this problem. The use of the fundamental harmonic method for analyzing the steady-state characteristics of an LCC converter is simple only when using an LC smoothing filter at its output. For the widely used LCC converter with a capacitive filter at the output, the fundamental harmonic method yields a significant error. Therefore, the characteristics of an LCC converter are currently studied mainly by time analysis and simulation methods.

The purpose of the study is to substantiate external characteristics of the LCC type converter using fundamental harmonic and time domain analysis methods and to compare the obtained results with the results of simulation modeling.

Materials and methods. Mathematical modeling of the converter was carried out using methods of circuit theory and automatic control. Studying the converter with the help of time domain analysis, vector-matrix methods for solving differential equations, methods of separating motion and fitting were used. Simulation modeling of the converter was carried out in the MATLAB/Simulink dynamic modeling environment.

Research results. External (load) characteristics of converters along with dependences of voltage gain on switching frequency allow to justify the choice of converter type and recommendations for their design. The derivation of external characteristics of the converter and dependences of short-circuit current and no-load voltage on switching frequency is given by the fundamental harmonic method. The time domain analysis is carried out for the most complex three-interval on a half-cycle switching mode of converter. The vector-matrix method is used to solve differential equations describing processes on three intervals of converter linearity. Analytical relationships are obtained that allow to calculate transient processes by the fitting method and to determine the characteristics of the steady-state mode. The latter is significantly complicated with an increase in the number of converter linearity intervals on a half-cycle of switching. This is explained by the fact that before calculating the characteristics of the steady-state mode, it is necessary to solve the nonlinear equation of this mode, which is greatly complicated already at three intervals of linearity on a half-cycle.

Conclusions. The fundamental harmonic method for the LCC converter has limited application, since it gives approximate results, which are refined by more accurate methods. The time domain analysis method is the most suitable and accurate method of study. But its application becomes more complicated with the increase in the number of converter linearity intervals when analyzing its steady-state operating mode.

References

1. Belov G.A., Malinin G.V., Sevrikov L.S., Semenov Yu.M. *Analiz kharakteristik ustanoivshegosya rezhima rezonansnykh preobrazovatelei tipa LLC* [Analysis of steady-state characteristics of LLC resonant converters]. *Elektrotehnika*, 2021, no. 8, pp. 15–20.
2. Belov G.A., Malinin G.V. *Sravnenie rezonansnykh preobrazovatelei postoyannogo napryazheniya tipov LLC i LCC* [Comparison of LLC-type and LCC-type dc-dc resonant converters topologies]. *Prakticheskaya silovaya elektronika*, 2023, no. 3(91), pp. 2–10.
3. Osipov A.V., Zapol'skii S.A. *Vol'todobavochnyi rezonansnyi LCL-T preobrazovatel' dlya avtonomnykh sistem elektropitaniya na vozobnovlyaemykh istochnikakh energii* [Boost type resonant LCL-T converter for autonomous power supply system from renewable sources]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring geoesursov*, 2018. vol. 329, no. 3, pp. 77–88.
4. Roitenberg Ya.N. *Avtomaticheskoe upravlenie* [Automatic control]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 552 p.
5. Awasthi A., Bagawade S., Kumar A., Jain P. Time-Domain Analysis of APWM-Frequency Modulated Low-Q LLC Resonant Converter for Wide Input and Load Range Applications. *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2019, pp. 1334–1340. DOI: 10.1109/ECCE.2019.8912706.
6. Abdel-Rahman S. Resonant LLC Converter: Operation and Design. Application Note AN2012-09, 2012, Infineon Technologies North America (IFNA) Corp. Available at: https://www.infineon.com/dgdl/Application_Note_Resonant+LLC+Converter+Operation+and+Design_Infineon.pdf?fileId=db3a30433a047ba0013a4a60e3be64a1 (Access Date: 2024, Aug. 12).
7. Borage M., Nagesh K.V., Bhatia M.S., Tiwari S. Design of LCL-T Resonant Converter Including the Effect of Transformer Winding Capacitance. *IEEE Trans. Ind. Electron*, 2009, vol. 56, no. 5, pp. 1420–1427. DOI: 10.1109/TIE.2012.2227897.
8. Borage M., Tiwari S., Kotaiah S. Analysis and Design of an LCL-T Resonant Converter as a Constant-Current Power Supply. *IEEE Trans. Ind. Electron*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 1547–1554. DOI: 10.1109/TIE.2005.858729.
9. Gilbert A.J. *Analysis, Design and Control of LCC Resonant Power Converters*. Boston, University of Sheffield, 2007, 204 p.
10. Glitz E.S., Ordonez M. MOSFET Power Loss Estimation in LLC Resonant Converters: Time Interval Analysis. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2019, vol. 34, iss. 12, pp. 11964–11980. DOI: 10.1109/TPEL.2019.2909903.
11. Fan S., Li H., Wang Z., Yuan Y. Time Domain Analysis and Efficiency Research of High Voltage Power Supply for Electron Beam Welder Based on LCC Resonance in DCM. In: *IEEE 20th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, 2017, pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICEMS.2017.8056097.
12. Kumar A., Awasthi A., Salari O. et al. A Novel Time Domain Analysis of the LLC-L Resonant Converter for the Use of the CLL and LLC Resonant Converter. *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, 2019, pp. 3453–3460. DOI: 10.1109/APEC.2019.8722120.
13. Middlebrook R.D., Cuk S. A general unified approach to modeling switching-converter power stages. In: *IEEE PESC Record*. New York, 1976, pp. 18–34. DOI: 10.1109/PESC.1976.707289.
14. Nagarajan C., Madheswaran M. Performance Estimation of LCL-T Resonant Converter with Fuzzy/PID Controller Using State Space Analysis. *International Journal of Computer and Electrical Engineering*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 534–542. DOI: 10.1007/s00202-011-0203-9.
15. Pawellek A., Bucher A., Duerbaum T. Resonant LCC converter for low-profile applications. In: *15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference*, 2010, pp. 1309–1314. DOI: 10.1109/MELCON.2010.5475966.
16. Socero T.B., Mühlethaler J., Linnér J. et al. Automated Design of a High-Power High Frequency LCC Resonant Converter for Electrostatic Precipitators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, vol. 60, no. 11, pp. 4805–4819.
17. Steigerwald R.L. A comparison of Half-Bridge Resonant Converter Topologies. *IEEE Trans. Power Electronics*, 1988, vol. 3, no. 2, pp. 174–182. DOI: 10.1109/APEC.1987.7067142.

18. Zhang Haifeng, Wang Peng. Design of an LCC Resonant Converter for Furnace Power Supply during Electron Beam Melting. *IEEJ Journal of Industry Applications*, 2017, vol. 6, pp. 387–394. DOI: 10.1541/ieejia.6.387.

19. Zouggar S., Nait Charif H., Azizi M. Neural control and transient analysis of the LCL-type resonant converter. *The European Physical Journal AP*, 2000, vol. 11, no. 1, pp. 21–26. DOI: 10.1051/epjap:2000142.

GENNADIY A. BELOV – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Industrial Electronics, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (belovga2020@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-6427-417X>).

GRIGORIY V. MALININ – Candidate of Technical Sciences, Head of the Industrial Electronics Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (malgrig6@mail.ru; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3993-0435>).

Формат цитирования: Белов Г.А., Малинин Г.В. Методы исследования резонансных преобразователей // Вестник Чувашского университета. 2024. № 4. С. 14–35. DOI: 10.47026/1810-1909-2024-4-14-35.